Correction du Devoir Maison 5
Calculs d'intégrales, équations différentielles, matrices

A faire pour le jeudi 06 janvier

Exercice I - Calculs d'intégrales

Soit $a > 0$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{a+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Partie 1 : Les premiers termes

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $a + x^2 \geqslant a > 0$. Donc la fonction $x \mapsto \frac{x^n}{a+x^2}$ est bien définie et même continue sur $\mathbb{R}$ et donc notamment sur $[0;1]$. Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad I_n \text{ existe.}}$$

2. Si $n = 0$, on a

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_0^1 \frac{1}{a+x^2} ddx \\ &= \frac{1}{a}\int_0^1 \frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right)^2}\,\mathrm{d}x \qquad\qquad \text{car } a>0 \\ &= \frac{1}{a}\left[\sqrt{a}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right)\right]_{x=0}^{x=1} \\ &= \frac{\sqrt{a}}{a}\arctan\left(\frac{\sqrt{a}}{a}\right). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{I_0 = \frac{\sqrt{a}}{a}\arctan\left(\frac{\sqrt{a}}{a}\right).}$$

3. Si $n = 1$, on a

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 \frac{x}{a+x^2} ddx \\ &= \left[\frac{1}{2}\ln\left(\left|a+x^2\right|\right)\right]_{x=0}^{x=1} \\ &= \frac{\ln(a+1)-\ln(a)}{2}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{I_1 = \frac{\ln(a+1)-\ln(a)}{2}.}$$

4. Si $n = 2$, on observe que $\frac{x^2}{a+x^2} = \frac{x^2+a-a}{a+x^2} = 1 - \frac{a}{a+x^2}$. Par conséquent,

$$I_2 = \int_0^1 \frac{x^2}{a+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 1\,\mathrm{d}x - a\int_0^1 \frac{1}{a+x^2}\,\mathrm{d}x = 1 - aI_0.$$

Donc par la question 1.

$$\boxed{I_2 = 1 - a\frac{\sqrt{a}}{a}\arctan\left(\frac{\sqrt{a}}{a}\right) = 1 - \sqrt{a}\arctan\left(\frac{\sqrt{a}}{a}\right).}$$

Partie 2 : Comportement asymptotique lorsque $a = 1$

On suppose que $a = 1$.

5. Soit $x \in [0;1]$, alors $0 \leqslant x^n \leqslant 1$. De plus $1 + x^2 > 0$, donc
$$0 \leqslant \frac{x^n}{1+x^2} \leqslant \frac{1}{1+x^2}.$$
Or $1 + x^2 \geqslant 1$ donc $\frac{1}{1+x^2} \leqslant 1$. Conclusion,
$$\boxed{\forall x \in [0;1], \qquad 0 \leqslant \frac{x^n}{1+x^2} \leqslant 1.}$$

6. Par l'inégalité précédente et la croissance de l'intégrale, car $0 < 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a
$$\int_0^1 0 \,\mathrm{d}x \leqslant I_n \leqslant \int_0^1 1 \,\mathrm{d}x$$
Autrement dit
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leqslant I_n \leqslant 1.$$
Conclusion,
$$\boxed{\text{la suite } (I_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est minorée par 0 et majorée par 1 donc est bornée.}}$$

7. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in [0;1]$, $x^{n+1} \leqslant x^n$. Donc
$$\frac{x^{n+1}}{1+x^2} \leqslant \frac{x^n}{1+x^2} \qquad \text{car } 1 + x^2 > 0.$$
Donc par croissance de l'intégrale car $0 \leqslant 1$, on obtient que
$$\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x^2} \,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} \,\mathrm{d}x.$$
Ainsi,
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad I_{n+1} \leqslant I_n.$$
Conclusion,
$$\boxed{\text{la suite } (I_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$$
De plus par la question précédente, la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi minorée. Donc par le théorème de convergence monotone, on en déduit que
$$\boxed{\text{la suite } (I_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge.}}$$

8. On pose pour tout $x \in [0;1]$,
$$\begin{cases} u(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} \\ v(x) = \frac{1}{1+x^2} \end{cases}.$$
Les fonctions u et v sont bien définies et même $\mathscr{C}^1$ sur $[0;1]$ et
$$\forall x \in [0;1], \qquad \begin{cases} u'(x) = x^n \\ v'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} \end{cases}.$$

Donc par intégration par parties,

$$\begin{aligned} I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\frac{1}{1+x^2}\right]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+1}\left(-\frac{2x}{(1+x^2)^2}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2(n+1)} - 0 + 2\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(n+1)(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Conclusion, on trouve bien que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad I_n = \frac{1}{2(n+1)} + \frac{2}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x.}$$

9. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in [0;1]$, $1+x^2 \geqslant 1$ donc $\frac{1}{1+x^2} \leqslant 1$ et $\frac{1}{(1+x^2)^2} \leqslant 1$. Ainsi, pour tout $x \in [0;1]$,

$$\frac{x^{n+2}}{(1+x^2)^2} \leqslant x^{n+2} \leqslant 1, \qquad \text{car } x^{n+2} \geqslant 0.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0;1], \qquad \frac{x^{n+2}}{(1+x^2)^2} \leqslant 1.}$$

10. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque l'inégalité précédente est vraie pour $x \in [0;1]$, par croissance de l'intégrale, car $0 \leqslant 1$, on trouve que

$$\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 1\,\mathrm{d}x = 1.$$

Donc par la question 8.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad I_{n+1} \leqslant \frac{1}{2(n+1)} + \frac{2}{n+1} = \frac{5}{2(n+1)}.$$

Ou encore,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad I_n \leqslant \frac{5}{2n}.$$

D'autre part, on a également vu que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \geqslant 0$. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{5}{2n}.$$

Enfin, $\lim\limits_{n\to+\infty} 0 = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5}{2n} = 0$. Donc par le théorème d'encadrement, la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = 0.$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{la suite } (I_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } 0.}$$

Partie 3 : Une autre (vraiment ?) intégrale

On considère l'intégrale

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2(t)}{1+2\cos^2(t)}\,\mathrm{d}t.$$

11. Soit $X \in \mathbb{R} \setminus \{-1;-3\}$. Par le théorème de décomposition en éléments simples, il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que
$$\frac{1}{(X+1)(X+3)} = \frac{a}{X+1} + \frac{b}{X+3}.$$
Or,
$$\frac{a}{X+1} + \frac{b}{X+3} = \frac{aX+3a+bX+b}{(X+1)(X+3)} = \frac{(a+b)X+3a+b}{(X+1)(X+3)}.$$
Donc en prenant notamment
$$\begin{cases} a+b=0 \\ 3a+b=1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a+b=0 \\ -2b=1 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a=-b=\frac{1}{2} \\ b=-\frac{1}{2} \end{cases}$$
On obtient bien
$$\boxed{\forall X \in \mathbb{R} \setminus \{-1;-3\}, \qquad \frac{1}{(X+1)(X+3)} = \frac{1/2}{X+1} - \frac{1/2}{X+3}.}$$

12. La fonction cosinus est continue sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1+2\cos^2(t) \geqslant 1 > 0$. Donc la fonction $x \mapsto \frac{\cos^2(t)}{1+2\cos^2(t)}$ est bien définie et même continue sur $\mathbb{R}$ et donc sur $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$. Conclusion,
$$\boxed{\text{l'intégrale } J \text{ existe.}}$$

13. Pour tout $t \in \left[0;\frac{\pi}{4}\right]$, posons $x = \tan(t) \in [0;1]$ i.e. $t = \arctan(x)$ et donc $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$. De plus, on sait que pour tout $t \in \left[0;\frac{\pi}{4}\right]$, on a $\frac{1}{\cos^2(t)} = \tan'(t) = 1+\tan^2(t)$. Ainsi,
$$\cos^2(t) = \frac{1}{1+\tan^2(t)} = \frac{1}{1+x^2}.$$
Dès lors,
$$J = \int_0^1 \frac{\frac{1}{1+x^2}}{1+\frac{2}{1+x^2}} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \int_0^1 \frac{\frac{1}{1+x^2}}{1+x^2+2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)(x^2+3)}\,\mathrm{d}x.$$
Conclusion,
$$\boxed{J = \int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)(x^2+3)}\,\mathrm{d}x.}$$

14. Par la question précédente et la question 11. avec $X = x^2 \in [0;1] \subseteq \mathbb{R} \setminus \{-3;-1\}$, on trouve que
$$\begin{aligned} J &= \int_0^1 \frac{1/2}{x^2+1} - \frac{1/2}{x^2+3}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{6}\frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{1}{2}\arctan(x) - \frac{1}{6}\sqrt{3}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)\right]_{x=0}^{x=1} \\ &= \frac{1}{2}\frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6}\frac{\pi}{6} \\ &= \left(\frac{1}{8} - \frac{\sqrt{3}}{12}\right)\pi. \end{aligned}$$
Conclusion,
$$\boxed{J = \frac{3-2\sqrt{3}}{24}\pi.}$$

Exercice II - Equations différentielles

Partie 1 : Calculs préliminaires

1. (a) Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ et $x\in\mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes

$$\begin{aligned}\frac{2}{x\left(1+x^2\right)}=\frac{a}{x}+\frac{bx+c}{1+x^2} \quad&\Leftrightarrow\quad \frac{2}{x\left(1+x^2\right)}=\frac{a+ax^2+bx^2+cx}{x\left(1+x^2\right)}\\ &\Leftrightarrow\quad \frac{2}{x\left(1+x^2\right)}=\frac{(a+b)\,x^2+cx+a}{x\left(1+x^2\right)}\end{aligned}$$

Il suffit alors de prendre

$$\begin{cases}a+b=0\\ c=0\\ a=2\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}b=-a=-2\\ c=0\\ a=2\end{cases}.$$

Conclusion, en prenant $a=2$, $b=-2$ et $c=0$, on a

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\qquad \frac{2}{x\left(1+x^2\right)}=\frac{2}{x}-\frac{2x}{1+x^2}.}$$

(b) Pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, $x\neq 0$ et $1+x^2\geqslant 1>0$ donc $x\left(1+x^2\right)\neq 0$. Ainsi la fonction a est bien définie et même continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc la fonction a admet des primitives sur $\mathbb{R}_+^*$. Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$. Posons

$$A(x)=\int_1^x a(t)\,\mathrm{d}t=\int_1^x\frac{2}{t\left(1+t^2\right)}\,\mathrm{d}t.$$

Par la question précédente,

$$A(x)=\int_1^x\frac{2}{t}-\frac{2t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=\Big[2\ln\left(|t|\right)-\ln\left(\left|1+t^2\right|\right)\Big]_{t=1}^{t=x}=2\ln(x)-\ln\left(1+x^2\right)-0+\ln(2).$$

Conclusion, l'ensemble des primitives de a est donné par

$$\boxed{\mathscr{S}=\left\{A:\begin{array}{ccl}\mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \ln\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)+C\end{array}\ \middle|\ C\in\mathbb{R}\right\}.}$$

2. La fonction b est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc admet des primitives sur $\mathbb{R}_+^*$. Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$. Posons

$$B(x)=\int_1^x b(t)\,\mathrm{d}t=\int_1^x t\ln(t)\,\mathrm{d}t$$

Posons pour tout $t\in\mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{cases}u(t)=\frac{t^2}{2}\\ v(t)=\ln(t).\end{cases}$$

Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $t>0$,

$$\begin{cases}u'(t)=t\\ v'(t)=\frac{1}{t}.\end{cases}$$

Donc par intégration par parties,

$$\begin{aligned}
B(x) &= \left[\frac{t^2}{2}\ln(t)\right]_{t=1}^{t=x} - \int_1^x \frac{t^2}{2}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{x^2\ln(x)}{2} - 0 - \int_1^x \frac{t}{2}\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{x^2\ln(x)}{2} - \left[\frac{t^2}{4}\right]_{t=1}^{t=x}\\
&= \frac{x^2\ln(x)}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble des primitives de b est donné par

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ B : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x^2\ln(x)}{2} - \frac{x^2}{4} + C \end{array} \middle| \; C \in \mathbb{R} \right\}.}$$

3. La fonction c est définie et même continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc admet des primitives sur $\mathbb{R}_+^*$. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ et

$$C(x) = \int_1^x c(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^x \frac{1+t^2}{2}\ln(t)\,\mathrm{d}t$$

Posons pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{cases} u(t) = \frac{t+\frac{t^3}{3}}{2} = \frac{3t+t^3}{6} \\ v(t) = \ln(t). \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $t > 0$,

$$\begin{cases} u'(t) = \frac{1+t^2}{2} \\ v'(t) = \frac{1}{t}. \end{cases}$$

Donc par intégration par parties,

$$\begin{aligned}
C(x) &= \left[\frac{3t+t^3}{6}\ln(t)\right]_{t=1}^{t=x} - \int_1^x \frac{3t+t^3}{6}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{x\left(3+x^2\right)\ln(x)}{6} - 0 - \int_1^x \frac{3+t^2}{6}\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{x\left(3+x^2\right)\ln(x)}{6} - \left[\frac{3t+\frac{t^3}{3}}{6}\right]_{t=1}^{t=x}\\
&= \frac{x\left(3+x^2\right)\ln(x)}{6} - \frac{9x+x^3}{18} + \frac{10}{18}.
\end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble des primitives de b est donné par

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ C : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x\left(3+x^2\right)\ln(x)}{6} - \frac{9x+x^3}{18} + \lambda \end{array} \middle| \; \lambda \in \mathbb{R} \right\}.}$$

Partie 2 : Résolution d'une équation différentielle d'ordre 1

On considère l'équation différentielle suivante d'inconnue y une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$(E) \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad xy'(x) + \frac{2y(x)}{1+x^2} = \left(1+x^2\right)\ln(x).$$

4. On observe que

$$(E) \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ y'(x) + \frac{2}{x\left(1+x^2\right)} y(x) = \frac{1+x^2}{x} \ln(x)\,.$$

Les fonctions $x \mapsto \frac{2}{x(1+x^2)}$ et $x \mapsto \frac{1+x^2}{x} \ln(|x|)$ sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$ donc par le théorème de Cauchy,

$$\boxed{\text{l'équation } (E) \text{ muni de la condition } y(1)=0 \text{ admet une unique solution.}}$$

5. L'équation (E_0) homogène associée à (E) est donnée par

$$(E_0) \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ y'(x) + \frac{2}{x\left(1+x^2\right)} y(x) = 0.$$

Par la question 1.b, la fonction $A : x \mapsto \ln\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)$ est une primitive de $a : x \mapsto \frac{2}{x(1+x^2)}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc l'ensemble des solutions de (E_0) est donné par

$$\begin{aligned}
\mathscr{S}_0 &= \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda\,\mathrm{e}^{-A(x)} \end{array} \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda\,\mathrm{e}^{-\ln\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)} \end{array} \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda\,\frac{1+x^2}{x^2} \end{array} \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R} \right\}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{S}_0 = \operatorname{Vect}\left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda\,\frac{1+x^2}{x^2} \end{array} \right) = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda\,\frac{1+x^2}{x^2} \end{array} \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R} \right\}.}$$

6. On procède à la méthode de variation de la constante. Soit y une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $y_0 : x \mapsto \frac{1+x^2}{x^2}$. La fonction y_0 est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et même $y_0 \in \mathscr{S}_0$. Posons $\lambda = y/y_0$ i.e. $y = \lambda\, y_0$ (car $y_0 \neq 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$). Dès lors, λ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
& y \text{ est solution de } (E) \\
\Leftrightarrow\quad & \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \lambda'(x) y_0(x) + \lambda(x) y_0'(x) + \frac{2}{x\left(1+x^2\right)} \lambda(x) y_0(x) = \frac{1+x^2}{x} \ln(x) \\
\Leftrightarrow\quad & \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \lambda'(x) y_0(x) + \lambda(x) \underbrace{\left(y_0'(x) + \frac{2}{x\left(1+x^2\right)} y_0(x) \right)}_{=0 \text{ car } y_0 \in \mathscr{S}_0} = \frac{1+x^2}{x} \ln(x) \\
\Leftrightarrow\quad & \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \lambda'(x) y_0(x) = \frac{1+x^2}{x} \ln(x) \\
\Leftrightarrow\quad & \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \lambda'(x) = \frac{1+x^2}{x y_0(x)} \ln(x) \qquad \text{car } y_0(x) \neq 0 \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \\
\Leftrightarrow\quad & \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \lambda'(x) = \frac{\left(1+x^2\right) x^2}{x\left(1+x^2\right)} \ln(x) \\
\Leftrightarrow\quad & \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \lambda'(x) = x \ln(x)
\end{aligned}$$

Ainsi, par la question 2. on obtient

$$\begin{aligned}
& y \text{ est solution de } (E) \\
\Leftrightarrow\quad & \exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \lambda(x) = \frac{x^2 \ln(x)}{2} - \frac{x^2}{4} + C \\
\Leftrightarrow\quad & \exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad y(x) = \lambda(x) y_0(x) = \left(\frac{x^2 \ln(x)}{2} - \frac{x^2}{4} + C \right) \frac{1+x^2}{x^2}.
\end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble des solutions de (E) est donné par

$$\boxed{\mathscr{S}_E = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{(1+x^2)(2\ln(x)-1)}{4} + C\frac{1+x^2}{x^2} \end{array} \middle| \, C \in \mathbb{R} \right\}.}$$

7. Par la question 4., on sait qu'il existe un unique élément $y_p \in \mathscr{S}_E$ vérifiant $y_p(1) = 0$, déterminons-le. Puisque $y_p \in \mathscr{S}_E$, on sait qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad y_p(x) = \left(2x^2\ln(x) - x^2 + C\right)\frac{\left(1+x^2\right)^2}{4x^2}.$$

En particulier pour $x = 1$,

$$0 = y_p(1) = (-1+C) \times \frac{4}{4} \qquad \Leftrightarrow \qquad C = 1.$$

Conclusion,

$$\boxed{y_p : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left(2x^2\ln(x) - x^2 + 1\right)\frac{\left(1+x^2\right)^2}{4x^2} \end{array}.}$$

Partie 3 : Résolution d'une équation différentielle d'ordre 2

On considère l'équation différentielle suivante d'inconnue z une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$(F) \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad z''(x) - \frac{2xz'(x)}{1+x^2} + \frac{2z(x)}{1+x^2} = \left(1+x^2\right)\ln(x).$$

On pose également l'équation homogène associée :

$$(F_0) \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad z''(x) - \frac{2xz'(x)}{1+x^2} + \frac{2z(x)}{1+x^2} = 0.$$

8. L'équation (F) est une équation différentielle du deuxième ordre cependant les coefficients de z' et z ne sont pas constants, nous ne sommes donc pas dans le cadre programme du cours de PTSI.

9. *(Question indépendante)* Soient $\left(\tilde{F}\right) : \forall x \in \mathbb{R}_+^*, z''(x) - 2z'(x) + 2z(x) = 0$ et $\left(\tilde{F}_c\right) : X^2 - 2X + 2 = 0$ l'équation caractéristique associée. Son discriminant est donné par $\Delta = 4 - 8 = -4 = (2i)^2 < 0$. Les racines de $\left(\tilde{F}_c\right)$ sont donc

$$r_1 = \frac{2+2i}{2} = 1+i \qquad \text{et} \qquad r_2 = \frac{2-2i}{2} = 1-i.$$

Donc l'ensemble des solutions de (F) est donné par

$$\boxed{\mathscr{S}_{\tilde{F}} = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^x\left(A\cos(x) + B\sin(x)\right) \end{array} \middle| \, (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.}$$

10. Soit $z \in \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & ax+b \end{array} \middle| \, (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$. Alors, il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $z(x) = ax + b$. La fonction z est deux fois dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} z \text{ solution } (F_0) \quad &\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad 0 - \frac{2ax}{1+x^2} + \frac{2ax+2b}{1+x^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{2b}{1+x^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad b = 0 \qquad \text{car } 1+x^2 \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad z(x) = ax. \end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble des solutions est donné par

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & ax \end{array} \middle| \, a \in \mathbb{R} \right\}.}$$

11. Soient z une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, $Y : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{z(x)}{x} \end{array}$ et $y = Y'$. Puisque z est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, alors Y est également deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc y est bien définie et même dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus on a

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad y(x) = \frac{z'(x)}{x} - \frac{z(x)}{x^2}.$$

Puis,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad y'(x) = \frac{z''(x)}{x} - \frac{z'(x)}{x^2} - \frac{z'(x)}{x^2} + 2\frac{z(x)}{x^3} = \frac{z''(x)}{x} - 2\frac{z'(x)}{x^2} + 2\frac{z(x)}{x^3}.$$

Ainsi, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{ll} & y \text{ est solution de } (E) \\ \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ y'(x) + \dfrac{2}{x(1+x^2)} y(x) = \dfrac{1+x^2}{x} \ln(x) \\ \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \dfrac{z''(x)}{x} - 2\dfrac{z'(x)}{x^2} + 2\dfrac{z(x)}{x^3} + \dfrac{2}{x(1+x^2)} \left(\dfrac{z'(x)}{x} - \dfrac{z(x)}{x^2} \right) = \dfrac{1+x^2}{x} \ln(x) \\ \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ z''(x) - 2\dfrac{z'(x)}{x} + 2\dfrac{z(x)}{x^2} + \dfrac{2}{x(1+x^2)} \left(z'(x) - \dfrac{z(x)}{x} \right) = \left(1+x^2\right) \ln(x) \ \text{ car } x \neq 0 \\ \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ z''(x) - 2\dfrac{z'(x)}{x} + \dfrac{2}{x(1+x^2)} z'(x) + \dfrac{2}{x^2} z(x) - \dfrac{2}{x^2(1+x^2)} z(x) = \left(1+x^2\right) \ln(x) \\ \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ z''(x) + \dfrac{2}{x} \left(-1 + \dfrac{1}{1+x^2} \right) z'(x) + \dfrac{2}{x^2} \left(1 - \dfrac{1}{1+x^2} \right) z(x) = \left(1+x^2\right) \ln(x) \\ \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ z''(x) + \dfrac{2}{x} \left(\dfrac{x^2}{1+x^2} \right) z'(x) + \dfrac{2}{x^2} \left(-\dfrac{x^2}{1+x^2} \right) z(x) = \left(1+x^2\right) \ln(x) \\ \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ z''(x) - \dfrac{2x}{1+x^2} z'(x) + \dfrac{2}{1+x^2} z(x) = \left(1+x^2\right) \ln(x) \end{array}$$

Tiens ! Mais voilà (F). Conclusion,

$$\boxed{y \text{ est solution de } (E) \ \Leftrightarrow z \text{ est solution de } (F).}$$

12. Avec les notations de la question précédente, par la question 6. on obtient

$$\begin{array}{ll} & z \text{ est solution de } (F) \\ \Leftrightarrow & \exists C_1 \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad y(x) = \dfrac{\left(1+x^2\right)\left(2\ln(x) - 1\right)}{4} + C\dfrac{1+x^2}{x^2} \\ \Leftrightarrow & \exists C_1 \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad Y'(x) = \dfrac{1+x^2}{2} \ln(x) - \dfrac{1+x^2}{2} + C_1 - \dfrac{C_1}{x^2}. \end{array}$$

Donc par la question 3.

$$\begin{array}{ll} & z \text{ est solution de } (F) \\ \Leftrightarrow & \exists (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad Y(x) = \dfrac{x\left(3+x^2\right)\ln(x)}{6} - \dfrac{9x + x^3}{18} - \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^3}{6} + C_1 x + \dfrac{C_1}{x} + C_2 \\ \Leftrightarrow & \exists (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad Y(x) = \dfrac{x\left(3+x^2\right)\ln(x)}{6} - x - \dfrac{2x^3}{9} + C_1 x + \dfrac{C_1}{x} + C_2 \\ \Leftrightarrow & \exists (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad z(x) = xY(x) = \dfrac{x^2\left(3+x^2\right)\ln(x)}{6} - \dfrac{2x^4}{9} + (C_1 - 1)x^2 + C_2 x + C_1. \end{array}$$

Conclusion, l'ensemble des solutions de (F) est donné par

$$\boxed{\mathscr{S}=\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \frac{x^2\left(3+x^2\right)\ln(x)}{6}-\frac{2x^4}{9}+\left(C_1-1\right)x^2+C_2x+C_1\end{array}\,\middle|\,(C_1,C_2)\in\mathbb{R}^2\right\}.}$$

Partie 4 : Problème de raccord

On souhaite résoudre l'équation suivant d'inconnue y une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$(G)\qquad \forall x\in\mathbb{R},\qquad xy'(x)+\frac{2y(x)}{1+x^2}=1+x^2.$$

Pour ce faire, on introduit les équations

$$(G_+)\qquad \forall x\in\mathbb{R}_+^*,\qquad xy'(x)+\frac{2y(x)}{1+x^2}=1+x^2.$$

$$(G_-)\qquad \forall x\in\mathbb{R}_-^*,\qquad xy'(x)+\frac{2y(x)}{1+x^2}=1+x^2.$$

13. Soit $y_1 : x\mapsto \frac{1+x^2}{2}$. La fonction y_1 est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, on a

$$xy'(x)+\frac{2y(x)}{1+x^2}=x\,(x)+\frac{2}{1+x^2}\,\frac{1+x^2}{2}=x^2+1.$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{la fonction } y_1 : x\mapsto \frac{1+x^2}{2} \text{ est une solution de } (G_+).}$$

14. On note que l'équation (E_0) déterminée à la question (5.) est aussi l'équation homogène associée à (G_+). Donc par la question précédente, l'ensemble des solutions de (G_+) est donné par

$$\begin{aligned}\mathscr{S}_+&=y_1+\mathscr{S}_0\\ &=\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \frac{1+x^2}{2}+\lambda\,\frac{1+x^2}{x^2}\end{array}\,\middle|\,\lambda\in\mathbb{R}\right\}\\ &=\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \frac{(1+x^2)(2\,\lambda+x^2)}{2x^2}\end{array}\,\middle|\,\lambda\in\mathbb{R}\right\}.\end{aligned}$$

Conclusion, (en prenant $\tilde{\lambda}=2\,\lambda$)

$$\boxed{\mathscr{S}_+=\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \frac{(1+x^2)(\lambda+x^2)}{2x^2}\end{array}\,\middle|\,\lambda\in\mathbb{R}\right\}.}$$

15. Soit y_+ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $y_- : \begin{array}{ccc}\mathbb{R}_-^* & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & y_+(-x)\end{array}$. Puisque y_+ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, par composée, y_- est dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$ et

$$\forall x\in\mathbb{R}_-^*,\qquad y_-'(x)=-y_+'(-x)\,.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}y_-\text{ est solution de }(G_-)\quad&\Leftrightarrow\quad \forall x\in\mathbb{R}_-^*,\qquad xy_-'(x)+\frac{2y_-(x)}{1+x^2}=1+x^2\\ &\Leftrightarrow\quad \forall x\in\mathbb{R}_-^*,\qquad -xy_+'(-x)+\frac{2y_+(-x)}{1+x^2}=1+x^2.\end{aligned}$$

Posons $t=-x$. Alors, lorsque x décrit $\mathbb{R}_-^*$, t décrit tout $\mathbb{R}_+^*$ et donc

$$\begin{aligned} y_- \text{ est solution de } (G_-) \quad &\Leftrightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad t y_+'(t) + \frac{2y_+(t)}{1+(-t)^2} = 1+(-t)^2 \\ &\Leftrightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad t y_+'(t) + \frac{2y_+(t)}{1+t^2} = 1+t^2 \\ &\Leftrightarrow \quad y_+ \text{ est solution de } (G_+). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{y_- \text{ est solution de } (G_-) \quad \Leftrightarrow \quad y_+ \text{ est solution de } (G_+).}$$

16. Avec les notations de la question précédente, par la question 14., on a

$$\begin{aligned} & y_- \text{ est solution de } (G_-) \\ \Leftrightarrow \quad & \exists\, \lambda \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad y_+(t) = \frac{\left(1+t^2\right)\left(\lambda+t^2\right)}{2t^2} \\ \Leftrightarrow \quad & \exists\, \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}_-^*, \quad y_-(x) = y_+(-x) = \frac{\left(1+(-x)^2\right)\left(\lambda+(-x)^2\right)}{2(-x)^2} \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{S}_- = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_-^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{(1+x^2)(\lambda+x^2)}{2x^2} \end{array} \ \middle|\ \lambda \in \mathbb{R} \right\}.}$$

17. Soit y une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} y \in \mathscr{S} \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} y \in \mathscr{S}_+ \\ y \in \mathscr{S}_- \\ 0 + 2y(0) = 1 \\ y \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \exists\, \lambda_1 \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ y(x) = \frac{(1+x^2)(\lambda_1+x^2)}{2x^2} \\ \exists\, \lambda_2 \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}_-^*,\ y(x) = \frac{(1+x^2)(\lambda_1+x^2)}{2x^2} \\ y(0) = \frac{1}{2} \\ y \text{ est dérivable en } 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Or si $\lambda_1 \neq 0$, alors,

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{\left(1+x^2\right)\left(\lambda_1+x^2\right)}{2x^2} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \left(1+x^2\right)\left(\frac{\lambda_1}{2x^2}+1\right) = \pm\infty.$$

Donc pour que y soit continue en 0 (nécessaire pour être ensuite dérivable), il faut que $\lambda_1 = 0$. De même, il faut $\lambda_2 = 0$. Dans ce cas, on obtient

$$\begin{aligned} y \in \mathscr{S} \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ y(x) = \frac{1+x^2}{2} \\ \forall x \in \mathbb{R}_-^*,\ y(x) = \frac{1+x^2}{2} \\ y(0) = \frac{1}{2} \\ y \text{ est dérivable sur } 0. \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = \frac{1+x^2}{2} \\ y \text{ est dérivable sur } 0. \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = \frac{1+x^2}{2} \qquad \text{car } x \mapsto \frac{1+x^2}{2} \text{ dérivable sur } \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble $\mathscr{S}$ ne possède qu'une unique solution :

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1+x^2}{2} \end{array} \right\}.}$$

Ce n'est pas tout à fait y_1 car y_1 n'est définie que sur $\mathbb{R}_+^*$ elle.

<u>Exercice III - Calcul matriciel</u>

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Partie 1 : Expressions par une suite numérique

On considère également la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par récurrence par

$$u_1 = 0,\ u_2 = 1, \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n.$$

1. Par calcul matriciel, on a

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par suite,

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

De même,

$$A^4 = A^3 \times A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 5 & 5 \\ 5 & 3 & 3 \\ 5 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$
$$A^5 = A^4 \times A = \begin{pmatrix} 11 & 5 & 5 \\ 5 & 3 & 3 \\ 5 & 3 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 11 & 11 \\ 11 & 5 & 5 \\ 11 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Conclusion,

$$\boxed{A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\ A^3 = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}\ A^4 = \begin{pmatrix} 11 & 5 & 5 \\ 5 & 3 & 3 \\ 5 & 3 & 3 \end{pmatrix}\ A^5 = \begin{pmatrix} 21 & 11 & 11 \\ 11 & 5 & 5 \\ 11 & 5 & 5 \end{pmatrix}.}$$

2. Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
A^3=aA^2+bA \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix}5&3&3\\3&1&1\\3&1&1\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}3&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix}5&3&3\\3&1&1\\3&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3a+b&a+b&a+b\\a+b&a&a\\a+b&a&a\end{pmatrix}\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases}5=3a+b\\3=a+b\\1=a\end{cases} \qquad \text{par unicité des coefficients d'une matrice}\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases}5=3+2\\b=3-a=2\\a=1\end{cases}
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\exists!\,(a,b)\in\mathbb{R}^2,\qquad A^3=aA^2+bA.}$$

Plus précisément on a $a=1$ et $b=2$ et donc

$$\boxed{A^3=A^2+2A.}$$

3. Procédons par l'absurde et supposons que A est inversible. Alors, par la question précédente $A^3=A^2+2A$ et donc

$$A^{-1}\times A^3=A^{-1}\left(A^2+2A\right)\qquad\Rightarrow\qquad A^2=A+2I_3.$$

Or

$$A+2I_3=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1&1\\1&2&0\\1&0&2\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}3&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}=A^2.$$

On obtient donc une contradiction. Conclusion,

$$\boxed{\text{la matrice } A \text{ n'est pas inversible.}}$$

4. Procédons par récurrence. Posons pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\mathscr{P}(n):\qquad \text{« } A^n=\begin{pmatrix}u_{n+2}&u_{n+1}&u_{n+1}\\u_{n+1}&u_n&u_n\\u_{n+1}&u_n&u_n\end{pmatrix}\text{ ».}$$

Initialisation. Si $n=1$, alors par construction de la suite : $u_n=u_1=0$, $u_{n+1}=u_2=1$ et $u_{n+2}=u_3=u_2+2u_1=1$. Ainsi,

$$\begin{pmatrix}u_{n+2}&u_{n+1}&u_{n+1}\\u_{n+1}&u_n&u_n\\u_{n+1}&u_n&u_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}=A=A^1$$

Donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons que $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie i.e. $A^n = \begin{pmatrix} u_{n+2} & u_{n+1} & u_{n+1} \\ u_{n+1} & u_n & u_n \\ u_{n+1} & u_n & u_n \end{pmatrix}$ et montrons $\mathscr{P}(n+1)$. On a

$$\begin{aligned} A^{n+1} = A^n \times A &= \begin{pmatrix} u_{n+2} & u_{n+1} & u_{n+1} \\ u_{n+1} & u_n & u_n \\ u_{n+1} & u_n & u_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} && \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= \begin{pmatrix} u_{n+2} + 2u_{n+1} & u_{n+2} & u_{n+2} \\ u_{n+1} + 2u_n & u_{n+1} & u_{n+1} \\ u_{n+1} + 2u_n & u_{n+1} & u_{n+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u_{n+3} & u_{n+2} & u_{n+2} \\ u_{n+2} & u_{n+1} & u_{n+1} \\ u_{n+2} & u_{n+1} & u_{n+1} \end{pmatrix} && \text{par définition de } (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}. \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad A^n = \begin{pmatrix} u_{n+2} & u_{n+1} & u_{n+1} \\ u_{n+1} & u_n & u_n \\ u_{n+1} & u_n & u_n \end{pmatrix}.}$$

5. *Méthode 1.* Par récurrence.

   Méthode 2. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Par la question précédente et la définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$,

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} u_{n+2} & u_{n+1} & u_{n+1} \\ u_{n+1} & u_n & u_n \\ u_{n+1} & u_n & u_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u_{n+1} + 2u_n & u_n + 2u_{n-1} & u_n + 2u_{n-1} \\ u_n + 2u_{n-1} & u_n & u_n \\ u_n + 2u_{n-1} & u_n & u_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u_n + 2u_{n-1} + 2u_n & u_n + 2u_{n-1} & u_n + 2u_{n-1} \\ u_n + 2u_{n-1} & u_n & u_n \\ u_n + 2u_{n-1} & u_n & u_n \end{pmatrix} \\ &= u_n \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + 2u_{n-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

   Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2, \qquad A^n = u_n A^2 + 2u_{n-1} A.}$$

Partie 2 : Les noyaux itérés pour les petits

On identifie $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ avec $\mathbb{R}^3$ (en écrivant les triplets en colonne). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$K_n = \left\{ X \in \mathbb{R}^3 \mid A^n X = 0_{\mathbb{R}^3} \right\}.$$

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons que $K_1 \subseteq K_n$. Soit $X \in K_1$. Montrons que $X \in K_n$. Puisque $X \in K_1$, on a $AX = 0_{\mathbb{R}^3}$. Si $n = 1$, alors bien sûr $K_1 \subseteq K_1$. Sinon, on a

$$A^n X = A^{n-1} A X = A^{n-1} 0_{\mathbb{R}^3} = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

   Donc $X \in K_n$. Ceci étant vrai pour tout $X \in K_1$. On en déduit que $K_1 \subseteq K_n$. Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad K_1 \subseteq K_n.}$$

7. Soit $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
X \in K_1 \quad & \Leftrightarrow \quad AX = 0_{\mathbb{R}^3} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x+y+z \\ x \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x+y+z=0 \\ x=0 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y=-z \\ x=0 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad X = \begin{bmatrix} 0 \\ -z \\ z \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{K_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -z \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; z \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right).}$$

Cela correspond à

$$\boxed{\text{la droite passant par } (0,0,0) \text{ et de vecteur directeur } (0,-1,1).}$$

8. Soit $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
X \in K_2 \quad \Leftrightarrow \quad A^2X = 0_{\mathbb{R}^3} \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 3x+y+z \\ x+y+z \\ x+y+z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x+y+z=0 \\ 3x+y+z=0 \end{cases} \qquad L_1 \leftrightarrow L_2 \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x=0 \end{cases} \qquad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y=-z \\ x=0 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad X = \begin{bmatrix} 0 \\ -z \\ z \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

On retrouve alors bien que

$$\boxed{K_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -z \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; z \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = K_1.}$$

9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geqslant 2$. Montrons que $K_n = K_{n-1}$. Soit $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
X \in K_n \quad & \Leftrightarrow \quad A^n X = 0_{\mathbb{R}^3} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} u_{n+2} & u_{n+1} & u_{n+1} \\ u_{n+1} & u_n & u_n \\ u_n & u_n & u_n \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} u_{n+2}x + u_{n+1}(y+z) \\ u_{n+1}x + u_n(y+z) \\ u_{n+1}x + u_n(y+z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} u_{n+2}x + u_{n+1}(y+z) = 0 \\ u_{n+2}x + u_n(y+z) = 0 \end{cases} \qquad \text{car } L_3 = L_2 \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (u_{n+1} + 2u_n)x + (u_n + 2u_{n-1})(y+z) = 0 \\ u_{n+1}x + u_n(y+z) = 0 \end{cases} \qquad \text{car } n \geqslant 2 \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2u_n x + 2u_{n-1}(y+z) = 0 \\ u_{n+1}x + u_n(y+z) = 0 \end{cases} \qquad L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} u_{n+1}x + u_n(y+z) = 0 \\ u_n x + u_{n-1}(y+z) = 0 \end{cases} \qquad L_1 \leftrightarrow \frac{1}{2}L_2 \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} u_{n+1} & u_n & u_n \\ u_n & u_{n-1} & u_{n-1} \\ u_n & u_{n-1} & u_{n-1} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
& \Leftrightarrow \quad A^{n-1} X = 0_{\mathbb{R}^3} \\
& \Leftrightarrow \quad X \in K_{n-1}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2, \qquad K_n = K_{n-1}.}$$

10. Par la question précédente, on a par une récurrence immédiate, pour tout $n \geqslant 2$,

$$K_n = K_{n-1} = \cdots = K_1.$$

Ce qui reste vrai si $n = 1$. Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad K_n = K_1.}$$

Partie 3 : Les puissances par récurrence

11. On considère les suites $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad v_n = u_{n+1} + u_n \quad \text{et} \quad w_n = u_{n+1} - 2u_n.$$

(a) Soit $n in \mathbb{N}^*$. Par définition des suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, on a

$$v_{n+1} = u_{n+2} + u_{n+1} = u_{n+1} + 2u_n + u_{n+1} = 2\left(u_{n+1} + u_n\right) = 2v_n.$$

De façon similaire,

$$w_{n+1} = u_{n+2} - 2u_{n+1} = u_{n+1} + 2u_n - 2u_{n+1} = 2u_n - u_{n+1} = -\left(u_{n+1} - 2u_n\right) = -w_n.$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{la suite } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une suite géométrique de raison } 2}$$

et

$$\boxed{\text{la suite } (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une suite géométrique de raison } -1.}$$

(b) Par la question précédente, on a

$$\begin{aligned}
& \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \begin{cases} v_n = 2^{n-1} v_1 = 2^{n-1}\left(u_2 + u_1\right) = 2^{n-1} \\ w_n = (-1)^{n-1} w_1 = (-1)^{n-1}\left(u_2 - 2u_1\right) = (-1)^{n-1} \end{cases} \\
\Rightarrow\quad & \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \begin{cases} u_{n+1} + u_n = 2^{n-1} \\ u_{n+1} - 2u_n = (-1)^{n-1} \end{cases} \\
\Rightarrow\quad & \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 3u_n = 2^{n-1} - (-1)^{n-1} \qquad L_1 \leftarrow L_1 - L_2.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = \frac{2^{n-1} + (-1)^n}{3}.}$$

12. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. *Méthode 1.* Par la question 4. on a

$$\operatorname{Tr}\left(A^n\right) = \operatorname{Tr}\left(\begin{pmatrix} u_{n+2} & u_{n+1} & u_{n+1} \\ u_{n+1} & u_n & u_n \\ u_n & u_n & u_n \end{pmatrix}\right) = u_{n+2} + 2u_n.$$

Donc par la question précédente,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Tr}\left(A^n\right) &= \frac{2^{n+1} + (-1)^{n+2}}{3} + 2\frac{2^{n-1} + (-1)^n}{3} \\
&= \frac{2^{n+1} + (-1)^n + 2^n + 2(-1)^n}{3} \\
&= \frac{(2+1)2^n + (1+2)(-1)^n}{3} \\
&= 2^n + (-1)^n.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \operatorname{Tr}\left(A^n\right) = 2^n + (-1)^n.}$$

Méthode 2. Par la question 5., on a de même pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Tr}\left(A^n\right) = \operatorname{Tr}\left(u_n A^2 + 2u_{n-1} A\right) &= u_n \operatorname{Tr}\left(A^2\right) + 2u_{n-1}\operatorname{Tr}(A) \qquad \text{car la trace est linéaire} \\
&= u_n \operatorname{Tr}\left(\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right) + 2u_{n-1}\operatorname{Tr}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \\
&= 5u_n + 2u_{n-1}.
\end{aligned}$$

Donc par la question précédente,

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\left(A^n\right) &= 5\frac{2^{n-1}+(-1)^n}{3}+2\frac{2^{n-2}+(-1)^{n-1}}{3}\\ &= \frac{(10+2)\,2^{n-2}+(-5+2)\,(-1)^{n-1}}{3}\\ &= \frac{3\times 2^n-3\,(-1)^{n-1}}{3}\\ &= 2^n+(-1)^n.\end{aligned}$$

On note que cette formule reste vraie si $n=1$ car $\mathrm{Tr}\,(A)=\mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\right)=1=2^1+(-1)^1$.

Conclusion, on retrouve bien que

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\qquad \mathrm{Tr}\left(A^n\right)=2^n+(-1)^n.}$$

13. Par la question 4. par exemple, on a

$$A^7=\begin{pmatrix}u_9&u_8&u_8\\u_8&u_7&u_7\\u_8&u_7&u_7\end{pmatrix}.$$

Or par la question 11.b

$$\begin{aligned}u_7&=\frac{2^{7-1}+(-1)^7}{3}=\frac{64-1}{3}=\frac{63}{3}=21\\ u_8&=\frac{2^{8-1}+(-1)^8}{3}=\frac{128+1}{3}=\frac{129}{3}=43\\ u_9&=\frac{2^{9-1}+(-1)^8}{3}=\frac{256-1}{3}=\frac{255}{3}=85.\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{A^7=\begin{pmatrix}85&43&43\\43&21&21\\43&21&21\end{pmatrix}.}$$

Partie 4 : Les puissances par diagonalisation

On pose $P=\begin{pmatrix}0&1&2\\1&-1&1\\-1&-1&1\end{pmatrix}$ et $D=P^{-1}AP$.

14. En appliquant l'algorithme de Gauss-Jordan, on a les calculs suivants :

$$\begin{array}{lcr}
P=\begin{pmatrix}0&1&2\\1&-1&1\\-1&-1&1\end{pmatrix} & & I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\\
\underset{\mathscr{L}}{\sim}\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&2\\-1&-1&1\end{pmatrix} & L_1\leftrightarrow L_2 & \underset{\mathscr{L}}{\sim}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\\
\underset{\mathscr{L}}{\sim}\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&2\\0&-2&2\end{pmatrix} & L_3\leftarrow L_1+L_3 & \underset{\mathscr{L}}{\sim}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}\\
\underset{\mathscr{L}}{\sim}\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&2\\0&0&6\end{pmatrix} & L_3\leftarrow L_3+2L_2 & \underset{\mathscr{L}}{\sim}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\2&1&1\end{pmatrix}
\end{array}$$

Ainsi,

$$\begin{array}{lcl}
P \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & I_3 \ \ L_3 \leftarrow \frac{1}{6}L_3 & \underset{\mathscr{L}}{\sim} \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3 \end{array} & \underset{\mathscr{L}}{\sim} \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 & 5 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & L_1 \leftarrow L_1 + L_2 & \underset{\mathscr{L}}{\sim} \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 2 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}
\end{array}$$

Puisque $P \underset{\mathscr{L}}{\sim} I_3$, on en déduit que P est inversible. De plus,

$$P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 2 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On pense bien à vérifier que $PP^{-1} = I_3$. Par suite,

$$\begin{aligned}
D &= P^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 2 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.}$$

15. Procédons par récurrence. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathscr{P}(n) : \qquad \text{« } A^n = PD^nP^{-1} \text{ »}$$

Initialisation. Si $n = 0$, alors $A^0 = I_3$ et $PD^nP^{-1} = PD^0P^{-1} = PI_3P^{-1} = PP^{-1} = I_3$. Donc $A^0 = PD^0P^{-1}$ et $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$ est vraie. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie i.e. $A^n = PD^nP^{-1}$. Montrons $\mathscr{P}(n+1)$. On a

$$\begin{aligned}
A^{n+1} &= A \times A^n \\
&= A \times PD^nP^{-1} && \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= PDP^{-1}PD^nP^{-1} && \text{car } D = P^{-1}AP \text{ donc } PDP^{-1} = PP^{-1}APP^{-1} = I_3AI_3 = A. \\
&= PDI_3D^nP^{-1} \\
&= PDD^nP^{-1} \\
&= PD^{n+1}P^{-1}.
\end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad A^n = PD^nP^{-1}.}$$

16. Par récurrence, on montre que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad D^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

Donc pour $n = 7$, $D^7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^7 & 0 \\ 0 & 0 & 2^7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 128 \end{pmatrix}$. On obtient donc que

$$\begin{aligned} A^7 = PD^7P^{-1} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 128 \end{pmatrix} \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 2 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \\ 256 & 128 & 128 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 128 & 64 & 64 \end{pmatrix} \\ = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 255 & 129 & 129 \\ 129 & 63 & 63 \\ 129 & 63 & 63 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 85 & 43 & 43 \\ 43 & 21 & 21 \\ 43 & 21 & 21 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Conclusion, nous obtenons (avec un émerveillement inouï) à nouveau que

$$\boxed{A^7 = \begin{pmatrix} 85 & 43 & 43 \\ 43 & 21 & 21 \\ 43 & 21 & 21 \end{pmatrix}.}$$