Devoir Maison 6
Analyse asymptotique, ensembles et applications, continuité et dérivabilité

A faire pour le vendredi 04 Février

Exercice I - Analyse asymptotique

On considère la fonction

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln\left(1+x^2\right) - x. \end{array}$$

Partie 1 : Etude de f

1. Justifier que f est bien définie et même dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
2. (a) Déterminer un équivalent simple de f en $+\infty$.
   (b) Préciser le comportement de f en $+\infty$ *(existence ou non d'une asymptote/d'une branche parabolique et en cas d'existence, position relative de la courbe par rapport à son asymptote).*
   (c) Déterminer un développement asymptotique de f à l'ordre $\frac{1}{x^4}$ en $+\infty$ *(On ne fera apparaître que des termes de la forme x^α, $\ln^\beta(x)$ et $\frac{1}{x^\gamma}$).*
3. Montrer que f définit une bijection de $\mathbb{R}$ dans J un intervalle que l'on précisera. On note $g = f^{-1}$ sa fonction réciproque.

Partie 2 : Comportement asymptotique de f en 0

4. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f admet un développement limité à l'ordre n en 0.
5. Calculer le développement limité à l'ordre 4 de f en 0.
6. En déduire $f^{(4)}(0)$.
7. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f^{(2k+1)}(0) = 0$.
8. Déterminer l'équation de la tangente de f en 0 et préciser la position relative de la courbe de f à sa tangente au voisinage de 0.
9. Soit $h : x \mapsto f(x) - x^2\cos(x) + 2\,\mathrm{sh}(x) - \tan(x)$. Déterminer un équivalent simple de h en 0.

Partie 3 : Développement limité de f' en 0

10. (a) **A l'aide du théorème de primitivation** des développements limités, calculer le développement limité à l'ordre 3 de f' en 0.
    (b) En déduire le développement limité en 0 à l'ordre 3 de $\frac{1}{f'}$.
11. A l'aide de la question 1. déterminer à nouveau mais par un calcul direct le développement limité à l'ordre 3 de $\frac{1}{f'}$ en 0.

Partie 4 : Existence du développement limité de g

12. Déterminer J' le domaine de dérivabilité de g et pour tout $y \in J'$, préciser une expression de $g'(y)$ en fonction de $g(y)$.

13. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $g \in \mathscr{C}^k(J', \mathbb{R})$.

14. Justifier que g admet un développement limité à l'ordre 4 en 0 et que g' admet un développement limité à l'ordre 3 en 0.

On note dans toute la suite $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^5$ les coefficients du développement limité de g en 0 :

$$g(y) \underset{y \to 0}{=} a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + a_4 y^4 + o\left(y^4\right).$$

15. Préciser a_0.

Partie 5 : Calcul du développement limité de g, méthode 1

16. A l'aide de la relation $\forall x \in \mathbb{R}$, $g \circ f(x) = x$, déterminer le développement limité de g en 0 à l'ordre 4.

17. En déduire la tangente de g en 0 ainsi que la position de la courbe de g par rapport à sa tangente. Est-ce cohérent avec la question 8. ?

Partie 6 : Calcul du développement limité de g, méthode 2

18. En fonction de a_1, a_2, a_3, a_4 :
    (a) calculer le développement limité de $g(y)^2$ à l'ordre 4 en 0.
    (b) calculer le développement limité de $g(y)^4$ à l'ordre 4 en 0.

19. A l'aide de la relation $\forall y \in J$, $f \circ g(y) = y$, déterminer à nouveau le développement limité de g en 0 à l'ordre 4.

Partie 7 : Calcul du développement limité de g, méthode 3

20. Préciser en fonction des coefficients a_1, a_2, a_3, a_4 le développement limité de $g'(y)$ en 0 à l'ordre 3.

21. A l'aide de la partie 3 calculer en fonction des coefficients a_1, a_2, a_3, a_4 le développement limité de $\frac{1}{f'(g(y))}$ en 0 à l'ordre 3.

22. En déduire à nouveau le développement limité de g en 0 à l'ordre 4.

Exercice II - Continuité, dérivabilité

On considère la fonction f définie par

$$f : x \mapsto \begin{cases} e^{\frac{x^2}{x^2-1}} & \text{si } x \in \left]-1;1\right[\\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Partie 1 : Etude de f

1. (a) Déterminer un équivalent simple de $f(x) - f(0)$ en 0.
   (b) Justifier que $f(0)$ est un extremum local de f et préciser sa nature.
2. Justifier que f est $\mathscr{C}^1$ sur $\left]-1;1\right[$ et calculer sa dérivée sur $\left]-1;1\right[$.
3. Montrer que f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et préciser sa dérivée sur $\mathbb{R}_+$.
4. Déterminer le tableau de variation complet de f sur $\mathbb{R}$.
5. Tracer la courbe représentative de f sur $\mathbb{R}$.

Partie 2 : Sur les dérivées de f

On admet dans la suite que f est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

6. Déterminer un équivalent simple de f en 1^-.
7. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x) \underset{x \to 1}{=} o\left((x-1)^n\right)$.
8. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(1) = 0$.
   On admet de même pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(-1) = 0$.
9. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}$ s'annule au moins $n+2$ fois sur $[-1;1]$ i.e. montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\exists \left(a_{n,1}, \ldots, a_{n,n+2}\right) \in [-1;1]^{n+2},\ a_{n,1} < a_{n,2} < \cdots < a_{n,n+2},\ \forall k \in [\![1;n+2]\!], \quad f^{(n)}\left(a_{n,k}\right) = 0.$$
10. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}$ est bornée sur $\mathbb{R}$.
11. Montrer que f est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ *(on n'exige pas de préciser la constante de Lipschitz associée).*

Partie 3 : Sur les dérivées n-ième de u

On pose

$$\forall x \in \left]-1;1\right[, \qquad u(x) = \frac{1}{x^2-1}.$$

12. Soit $a \in \mathbb{R}$. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, la dérivée n-ième de v_a : $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{a\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x-a} \end{array}$.
13. A l'aide de la formule de Leibniz, montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \left]-1;1\right[, \qquad u^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^n\, n!}{(x-1)^{k+1}\,(x+1)^{n-k+1}}.$$
14. En déduire une expression de la dérivée n-ième de u sans somme.
15. Retrouver le résultat de la question précédente à l'aide d'une décomposition en éléments simples.
16. En déduire les dérivées n-ième de $w : x \mapsto \frac{x^2}{x^2-1}$ sur $\left]-1;1\right[$.

Exercice III - Ensembles et applications

Partie 1 : Applications

Soit E un ensemble et $f \in \mathscr{F}(E,E)$ telle que $f \circ f = f$.

1. Montrer que f est injective si et seulement si $f = \mathrm{Id}_E$.
2. Montrer que f est surjective si et seulement si $f = \mathrm{Id}_E$.
3. Déterminer un ensemble E et une fonction $f \in \mathscr{F}(E,E)$ vérifiant $f \circ f = f$ mais telle que $f \neq \mathrm{Id}_E$.

Partie 2 : Ensembles

On considère l'application suivante :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathscr{P}(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{P}(\mathbb{R}) \\ E & \mapsto & (E \cap A) \cup B. \end{array}$$

4. Préciser $f(\emptyset)$, $f(A)$, $f(B)$ et $f(\mathbb{R})$.
5. Préciser f lorsque $A = \emptyset$.
6. Préciser f lorsque $B = \mathbb{R}$.
7. Soit $E \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$ tel que $B \subseteq E \subseteq A \cup B$.
   (a) Soit $x \in E$, montrer que $x \in f(E)$, que peut-on en déduire ?
   (b) Montrer que $f(E) = E$.
8. Réciproquement, on suppose que $E \in \mathrm{Im}(f)$. Montrer que $B \subseteq E \subseteq A \cup B$.
9. Déduire des questions précédentes que $\mathrm{Im}(f) = \{ E \in \mathscr{P}(\mathbb{R}) \mid E = f(E) \}$.
10. Montrer que $f \circ f = f$.
11. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que f soit bijective.