Correction du Devoir Maison 6
Analyse asymptotique, ensembles et applications, continuité et dérivabilité

A faire pour le vendredi 04 Février

Exercice I - Analyse asymptotique

On considère la fonction

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln\left(1+x^2\right) - x. \end{array}$$

Partie 1 : Etude de f

1. La fonction logarithme est définie et même dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ mais pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1+x^2 \geqslant 1 > 0$. Ainsi,

$$\boxed{f \text{ est déifnie et même dérivable sur } \mathbb{R}.}$$

De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = \frac{2x}{1+x^2} - 1 = \frac{2x-1-x^2}{1+x^2} = -\frac{x^2-2x+1}{1+x^2} = -\frac{(x-1)^2}{1+x^2}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = -\frac{(x-1)^2}{1+x^2}.}$$

2. (a) Pour tout $x > 0$, on a

$$f(x) = \ln\left(1+x^2\right) - x = -x + \ln\left(x^2\right) + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = -x + 2\ln(x) + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right).$$

Or $\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc

$$\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \underset{x\to+\infty}{\ll} 2\ln(x) \underset{x\to+\infty}{\ll} -x.$$

Conclusion,

$$\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} -x.}$$

(b) On a pour tout $x > 0$,

$$f(x) + x = 2\ln(x) + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Donc la fonction f présente $\boxed{\text{une branche asymptotique de direction } y = -x}$ mais ne possède pas d'asymptote en $+\infty$.

(c) On sait que $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{=} u - \frac{u^2}{2} + o\left(u^2\right)$. Posons $u = \frac{1}{x^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi,

$$\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right).$$

D'où

$$\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{=} -x + 2\ln(x) + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right).}$$

3. Par la question 1. on a
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = -\frac{(x-1)}{1+x^2}.$$
Donc pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, on a $f'(x) < 0$. Donc la fonction f est strictement négative sur $\mathbb{R}$ sauf en un seul point. On en déduit que la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. De plus, la fonction f étant dérivable sur $\mathbb{R}$ elle est notamment continue sur $\mathbb{R}$. Donc par le théorème de la bijection, on en déduit que f définit une bijection de $\mathbb{R}$ dans $J = f(\mathbb{R})$ et de plus,
$$J = f(\mathbb{R}) = \left] \lim_{x\to+\infty} f(x) ; \lim_{x\to-\infty} f(x) \right[.$$
Or par la question 2.a $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} -x$ donc
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} -x = -\infty.$$
De même, pour tout $x < 0$, on a
$$f(x) = -x + \ln\left(x^2\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = -x + 2\ln(|x|) + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right).$$
D'où,
$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} -x.$$
Et donc
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -x = +\infty.$$
Attention, bien que le résultat soit opposé, la fonction f n'est pas impaire pour autant, ni paire d'ailleurs. Donc $J =]-\infty; +\infty[= \mathbb{R}$. Conclusion,
$$\boxed{f \text{ définit une bijection de } \mathbb{R} \text{ dans } J = \mathbb{R}.}$$
On note $g = f^{-1}$ sa fonction réciproque.

Partie 2 : Comportement asymptotique de f en 0

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction f est définie et même de classe $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ donc en 0. Donc d'après le théorème de Taylor-Young, on en déduit que
$$\boxed{f \text{ admet un développement limité à l'ordre } n \text{ en } 0.}$$

5. Rappelons que $\ln(1+u) \underset{u\to0}{=} u - \frac{u^2}{2} + o\left(u^2\right)$. Posons cette fois $u = x^2 \underset{x\to0}{\longrightarrow} 0$. Dès lors,
$$\ln\left(1+x^2\right) \underset{x\to0}{=} x^2 - \frac{x^4}{2} + o\left(x^4\right).$$
Conclusion,
$$\boxed{f(x) \underset{x\to0}{=} -x + x^2 - \frac{x^4}{2} + o\left(x^4\right).}$$

6. Puisque f est $\mathscr{C}^4$ en 0, on sait par la formule de Taylor-Young que
$$f(x) \underset{x\to0}{=} f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{6}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{24}x^4 + o\left(x^4\right).$$
Donc par unicité du développement limité, à l'aide de la question précédente, on en déduit que
$$\frac{f^{(4)}(0)}{24} = -\frac{1}{2}.$$
Conclusion,
$$\boxed{f^{(4)}(0) = -12.}$$

7. De même que précédemment, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, on a

$$\ln\left(1+x^2\right) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}\, x^{2k}}{k} + o\left(x^{2n}\right).$$

Donc

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} -x + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}\, x^{2k}}{k} + o\left(x^{2n}\right).$$

Notamment on remarque qu'à part $-x$, tous les termes d'ordre impair sont nuls. Or la fonction f étant de classe $\mathscr{C}^{2n}$ en 0, par la formule de Taylor-Young, on a

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{2n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o\left(x^{2n}\right).$$

Donc par unicité du développement limité,

$$\forall k \in\in [\![1; n-1]\!],\ (car\ n \geqslant 2) \qquad \frac{f^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!} = 0.$$

Ceci étant vrai pour tout $n \geqslant 2$, on conclut que,

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad f^{(2k+1)}(0) = 0.}$$

8. On sait que

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} -x + x^2 + o\left(x^2\right).$$

On en déduit donc f admet pour tangente en 0 la droite d'équation

$$\boxed{y = -x.}$$

De plus,

$$f(x) + x \underset{x\to 0}{\sim} x^2 \geqslant 0$$

Or deux équivalents ont même signe au voisinage du point considéré donc au voisinage de 0, $f(x)+x \geqslant 0$ et donc

$$\boxed{\text{le graphe de } f \text{ est au-dessus de sa tangente au voisinage de } 0.}$$

9. Je pressents un ordre 5... On sait par la question 7. que

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} -x + x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + o\left(x^6\right) \underset{x\to 0}{=} -x + x^2 - \frac{x^4}{2} + o\left(x^5\right).$$

De plus,

$$-x^2\cos(x) \underset{x\to 0}{=} -x^2\left(1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right)\right) \underset{x\to 0}{=} -x^2 + \frac{x^4}{2} + o\left(x^5\right).$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
2\,\mathrm{sh}(x) - \tan(x) &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{3}\left(2x + \frac{2x^3}{6} + \frac{2x^5}{120} + o\left(x^5\right) - x - \frac{x^3}{3} - \frac{2x^5}{15} + o\left(x^5\right)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^5}{60} - \frac{2x^5}{15} + o\left(x^5\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^5}{60} - \frac{8x^5}{60} + o\left(x^5\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} x - \frac{7x^5}{60} + o\left(x^5\right).
\end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{array}{rlllll} h(x) & \underset{x\to 0}{=} f(x) - x^2\cos(x) + 2\,\mathrm{sh}(x) - \tan(x) \\ & \underset{x\to 0}{=} -x & +x^2 & -\frac{x^4}{2} & & +o\left(x^5\right) \\ & & -x^2 & +\frac{x^4}{2} & & +o\left(x^5\right) \\ & +x & & & -\frac{7x^5}{60} & +o\left(x^5\right) \\ & \underset{x\to 0}{=} -\frac{7x^5}{60} + o\left(x^5\right). \end{array}$$

Tiens oui c'était bien de l'ordre 5. Conclusion,

$$\boxed{h(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{7x^5}{60}.}$$

Partie 3 : Développement limité de f' en 0

10. (a) Par la question 5., on a

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} -x + x^2 - \frac{x^4}{2} + o\left(x^4\right).$$

De plus f est $\mathscr{C}^4$ en 0 donc f' existe et f' est même $\mathscr{C}^3$ en 0. Donc par le théorème de Taylor-Young, il existe $(a_0, a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$f'(x) \underset{x\to 0}{=} a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + o\left(x^3\right).$$

Or f est une primitive de f sur $\mathbb{R}$ donc par le théorème de primitivation des développements limités, on a

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} f(0) + a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \frac{a_3}{4}x^4 + o\left(x^4\right).$$

Donc par unicité du développement limité :

$$\begin{cases} f(0) = 0 \text{ OK} \\ a_0 = -1 \\ \frac{a_1}{2} = 1 \\ \frac{a_2}{3} = 0 \\ \frac{a_3}{4} = -\frac{1}{2} \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} a_0 = -1 \\ a_1 = 2 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = -2 \end{cases}.$$

Conclusion,

$$\boxed{f'(x) \underset{x\to 0}{=} -1 + 2x - 2x^3 + o\left(x^3\right).}$$

On vérifie que cela correspond bien à la dérivation du développement limité de f.

(b) Par la question précédente, au voisinage de 0, on a

$$\frac{1}{f'(x)} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{-1 + 2x - 2x^3 + o\left(x^3\right)} \underset{x\to 0}{=} -\frac{1}{1 - 2x + 2x^3 + o\left(x^3\right)}$$

On sait que $\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + o\left(u^3\right)$. Posons $u(x) \underset{x\to 0}{=} -2x + 2x^3 + o\left(x^3\right)$. Alors,

- $u(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.
- De plus,

$$u(x)^2 \underset{x\to 0}{=} \left(-2x + 2x^3 + o\left(x^3\right)\right)\left(-2x + 2x^3 + o\left(x^3\right)\right) \underset{x\to 0}{=} 4x^2 + o\left(x^3\right).$$

- Puisque $u(x) \underset{x\to 0}{\sim} -2x$, alors $u(x)^3 \underset{x\to 0}{\sim} -8x^3$ et donc

$$u(x)^3 \underset{x\to 0}{=} -8x^3 + o\left(x^3\right).$$

- Enfin $o\left(u(x)^3\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^3\right)$.

Dès lors,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{f'(x)} &\underset{x\to 0}{=} -\tfrac{1}{1+u(x)} \\
&\underset{x\to 0}{=} -\left(1+2x -2x^3 + o\left(x^3\right)\right. \\
&\qquad\qquad +4x^2 \qquad + o\left(x^3\right) \\
&\qquad\qquad\qquad +8x^3 + o\left(x^3\right) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \left. + o\left(x^3\right)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} -\left(1+2x+4x^2+6x^3+o\left(x^3\right)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} -1-2x-4x^2-6x^3+o\left(x^3\right).
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\frac{1}{f'(x)} \underset{x\to 0}{=} -1-2x-4x^2-6x^3+o\left(x^3\right).}$$

11. Par la question 1., on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = -\frac{(x-1)^2}{1+x^2}.$$

Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}, \qquad \frac{1}{f'(x)} = -\frac{1+x^2}{(1-x)^2}.$$

Or, on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1-x)^2} = (1-x)^{-2} &\underset{x\to 0}{=} 1 + (-2)(-x) + \frac{(-2)(-3)}{2}(-x)^2 + \frac{(-2)(-3)(-4)}{6}(-x)^3 + o\left(x^3\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} 1 + (-2)(-x) + \frac{(-2)(-3)}{2}(-x)^2 + \frac{(-2)(-3)(-4)}{6}(-x)^3 + o\left(x^3\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} 1+2x+3x^2+4x^3+o\left(x^3\right).
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{f'(x)} &\underset{x\to 0}{=} -\left(1+x^2\right)\left(1+2x+3x^2+4x^3+o\left(x^3\right)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} -1-2x \quad -3x^2-4x^3+o\left(x^3\right) \\
&\qquad\qquad\quad -x^2-2x^3+o\left(x^3\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} -1-2x-4x^2-6x^3+o\left(x^3\right).
\end{aligned}$$

Oooh ! On retrouve le résultat de la question précédente :

$$\boxed{\frac{1}{f'(x)} \underset{x\to 0}{=} -1-2x-4x^2-6x^3+o\left(x^3\right).}$$

Partie 4 : Existence du développement limité de g

12. Par ce qui précède, on a
   - la fonction f est strictement monotone (décroissante) sur $\mathbb{R}$ donc sur $]-\infty;1[$ et sur $]1;+\infty[$,
   - la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc sur $]-\infty;1[$ et sur $]1;+\infty[$,
   - Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$f'(x) = -\frac{(x-1)^2}{1+x^2}.$$
   Donc pour tout $x \in]-\infty;1[$, $f'(x) \neq 0$ et de même pour tout $x \in]1;+\infty[$, $f'(x) \neq 0$.

   Donc en appliquant le théorème de la dérivée de la fonction réciproque sur **l'intervalle** $]-\infty;1[$ d'une part et sur l'intervalle $]1;+\infty[$ d'autre part, on en déduit que g est dérivable sur $f(]-\infty;1[)$ et sur $f(]1;+\infty[)$. Or $f(1) = \ln(2) - 1$ et par le théorème de la bijection,
   $$f(]-\infty;1[) = \left]f(1); \lim_{x\to-\infty} f(x)\right[=]\ln(2)-1;+\infty[\qquad \text{et} \qquad f(]1;+\infty[) =]-\infty;\ln(2)-1[\,.$$
   D'où,
   $$\boxed{g \text{ est dérivable sur } J' = \mathbb{R}\setminus\{\ln(2)-1\}.}$$
   De plus,
   $$\forall y \in J', \qquad g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}.$$
   Donc par la question 1.
   $$\boxed{\forall y \in J', \qquad g'(y) = -\frac{1+g(y)^2}{(1-g(y))^2}.}$$

13. On pose pour tout $k \in \mathbb{N}$,
   $$\mathscr{P}(k) : \qquad « \ g \in \mathscr{C}^k\left(J', \mathbb{R}\right). \ »$$
   Procédons par récurrence.

   Initialisation. Si $k = 0$, alors par la question précédente, on sait que g est dérivable et donc continue sur J'. Donc $g \in \mathscr{C}^0(J', \mathbb{R})$, donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

   Hérédité. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrons que $\mathscr{P}(k) \Rightarrow \mathscr{P}(k+1)$. On suppose que $\mathscr{P}(k)$ est vraie et montrons que $\mathscr{P}(k+1)$ l'est aussi. Par hypothèse de récurrence, g est $\mathscr{C}^k$ sur J'. De plus, puisque g est bijective, si $y \neq \ln(2) - 1 = f(1)$, alors $g(y) \neq 1$. Donc pour tout $y \in J'$, $(1-g(y))^2 \neq 0$. Donc la fonction $y \mapsto \frac{1+g(y)^2}{(1-g(y))^2}$ est $\mathscr{C}^k$ sur J' comme somme et quotient de fonctions $\mathscr{C}^k$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur J'. Or pour tout $y \in J'$, $g'(y) = -\frac{1+g(y)^2}{(1-g(y))^2}$. Donc g' est $\mathscr{C}^k$ sur J. Par suite, g est $\mathscr{C}^{k+1}$ sur J'. Donc $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.

   Conclusion, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(k)$ est vraie i.e.
   $$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \qquad g \in \mathscr{C}^k\left(J', \mathbb{R}\right).}$$

14. Par la question précédente, g est $\mathscr{C}^4$ sur J' donc notamment en 0 (car $\ln(2) - 1 \neq 0$) et donc g' est $\mathscr{C}^3$ en 0. Donc par le théorème de Taylor-Young, on en déduit que
   $$\boxed{g, \text{ respectivement } g', \text{ admet un développement limité à l'ordre 4, respectivement 3, en 0.}}$$

On note dans toute la suite $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^5$ les coefficients du développement limité de g en 0 :
$$g(y) \underset{y\to0}{=} a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + a_4 y^4 + o\left(y^4\right).$$

15. Puisque $f(0) = 0$ et que $g = f^{-1}$, on en déduit que $g(0) = 0$. Conclusion,
   $$\boxed{g(0) = 0.}$$

Partie 5 : Calcul du développement limité de g, méthode 1

16. Par la question 5. on a

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} -x + x^2 - \frac{x^4}{2} + o\left(x^4\right).$$

Donc

- $f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.
- De plus,

$$\begin{aligned}
f(x)^2 &\underset{x\to 0}{=} \left(-x + x^2 - \tfrac{x^4}{2} + o\left(x^4\right)\right)\left(-x + x^2 - \tfrac{x^4}{2} + o\left(x^4\right)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} x^2 \quad -x^3 \qquad +o\left(x^4\right) \\
&\qquad\quad -x^3 + x^4 \quad +o\left(x^4\right) \\
&\qquad\qquad\qquad +o\left(x^4\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} x^2 - 2x^3 + x^4 + o\left(x^4\right).
\end{aligned}$$

- Puis,

$$\begin{aligned}
f(x)^3 &\underset{x\to 0}{=} \left(-x + x^2 - \tfrac{x^4}{2} + o\left(x^4\right)\right)\left(x^2 - 2x^3 + x^4 + o\left(x^4\right)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} -x^3 \quad +2x^4 \quad +o\left(x^4\right) \\
&\qquad\qquad +x^4 \quad +o\left(x^4\right) \\
&\qquad\qquad\qquad +o\left(x^4\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} -x^3 + 3x^4 + o\left(x^4\right).
\end{aligned}$$

- Comme $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} -x$, alors $f(x)^4 \underset{x\to 0}{\sim} x^4$ et donc

$$f(x)^4 \underset{x\to 0}{=} x^4 + o\left(x^4\right).$$

- Enfin, $o\left(f(x)^4\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^4\right)$.

Forts de ces calculs, nous obtenons donc que

$$\begin{aligned}
g\left(f(x)\right) &\underset{x\to 0}{=} a_1 f(x) + a_2 f(x)^2 + a_3 f(x)^3 + a_4 f(x)^4 + o\left(f(x)^4\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} -a_1 x \quad +a_1 x^2 \qquad\qquad -a_1\tfrac{x^4}{2} \quad +o\left(x^4\right) \\
&\qquad\qquad +a_2 x^2 \quad -2a_2 x^3 \quad +a_2 x^4 \quad +o\left(x^4\right) \\
&\qquad\qquad\qquad -a_3 x^3 \quad +3a_3 x^4 \quad +o\left(x^4\right) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad +a_4 x^4 \quad +o\left(x^4\right) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +o\left(x^4\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} -a_1 x + (a_1 + a_2)\, x^2 - (2a_2 + a_3)\, x^3 + \left(-\tfrac{a_1}{2} + a_2 + 3a_3 + a_4\right) x^4 + o\left(x^4\right)
\end{aligned}$$

Or pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g\left(f(x)\right) = x$ et donc $g\left(f(x)\right) \underset{x\to 0}{=} x + o\left(x^4\right)$. Donc par unicité du développement limité, on a

$$\begin{cases} -a_1 = 1 \\ a_1 + a_2 = 0 \\ 2a_2 + a_3 = 0 \\ -\frac{a_1}{2} + a_2 + 3a_3 + a_4 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_1 = -1 \\ a_2 = -a_1 = 1 \\ a_3 = -2a_2 = -2 \\ a_4 = \frac{a_1}{2} - a_2 - 3a_3 = -\frac{1}{2} - 1 + 6 = \frac{9}{2}. \end{cases}$$

Conclusion,

$$\boxed{g(y) \underset{y\to 0}{=} -y + y^2 - 2y^3 + \frac{9}{2}y^4 + o\left(y^4\right).}$$

17. Par la question précédente, on en déduit que la tangente de g en 0 a pour équation

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad T(x) = -x.}$$

De plus,

$$g(y) + y \underset{y\to 0}{\sim} y^2 > 0.$$

Or deux équivalents ont le même signe au voisinage considéré donc

$$\boxed{\text{la courbe représentative de } g \text{ est au-dessus de sa tangente au voisinage de } 0.}$$

Cela est bien cohérent avec la question 8. car la tangente de g en 0 s'obtient à partir de celle de f par la symétrie axiale d'axe $y = x$. Or la droite $y = -x$ est bien son propre symétrique. De plus puisque f est en-dessous de cette tangente, par symétrie par rapport à $y = x$, g se trouve bien au-dessus au voisinage de 0.

Partie 6 : Calcul du développement limité de g, méthode 2

18. (a) Puisque $g(y) \underset{y\to 0}{=} a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + a_4 y^4 + o\left(y^4\right)$, on a

$$\begin{aligned}
g(y)^2 &\underset{y\to 0}{=} \left(a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + a_4 y^4 + o\left(y^4\right)\right)\left(a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + a_4 y^4 + o\left(y^4\right)\right) \\
&\underset{y\to 0}{=} \begin{array}{llll} a_1^2 y^2 & +a_1 a_2 y^3 & +a_1 a_3 y^4 & +o\left(y^4\right) \\ & +a_1 a_2 y^3 & +a_2^2 y^4 & +o\left(y^4\right) \\ & & +a_1 a_3 y^4 & +o\left(y^4\right) \\ & & & +o\left(y^4\right) \end{array} \\
&\underset{y\to 0}{=} a_1^2 y^2 + 2a_1 a_2 y^3 + \left(2a_1 a_3 + a_2^2\right) y^4 + o\left(y^4\right).
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{g(y)^2 \underset{y\to 0}{=} a_1^2 y^2 + 2a_1 a_2 y^3 + \left(2a_1 a_3 + a_2^2\right) y^4 + o\left(y^4\right).}$$

(b) Si $a_1 \neq 0$ *(important !)* alors $g(y) \underset{y\to 0}{\sim} a_1 y$. Par élévation à la puissance, $g(y)^4 \underset{y\to 0}{\sim} a_1^4 y^4$ et $g(y)^4 \underset{y\to 0}{=} a_1^4 y^4 + o\left(y^4\right)$. Si $a_1 = 0$, alors $g(y) \underset{y\to 0}{=} o(y)$ et donc $g(y)^4 \underset{y\to 0}{=} a_1^4 y^4 + o\left(y^4\right)$ reste vrai dans ce cas. Conclusion,

$$\boxed{g(y)^4 \underset{y\to 0}{=} a_1^4 y^4 + o\left(y^4\right).}$$

19. Par continuité de g en 0, $g(y) \underset{y\to 0}{\longrightarrow} g(0) = 0$. Or par la question 5. $f(x) \underset{x\to 0}{=} -x + x^2 - \frac{x^4}{2} + o\left(x^4\right)$. On obtient donc que

$$f(g(y)) \underset{y\to 0}{=} -g(y) + g(y)^2 - \frac{g(y)^4}{2} + o\left(g(y)^4\right).$$

Or par les questions précédentes, on sait que

$$\begin{aligned}
g(y) &\underset{y\to 0}{=} a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + a_4 y^4 + o\left(y^4\right) \\
g(y)^2 &\underset{y\to 0}{=} a_1^2 y^2 + 2a_1 a_2 y^3 + \left(2a_1 a_3 + a_2^2\right) y^4 + o\left(y^4\right) \\
g(y)^4 &\underset{y\to 0}{=} a_1^4 y^4 + o\left(y^4\right).
\end{aligned}$$

On en déduit également que $o\left(g(y)^4\right) \underset{y\to 0}{=} o\left(y^4\right)$. D'où,

$$f(g(y)) \underset{y\to 0}{=} -a_1 y + \left(a_1^2 - a_2\right) y^2 + \left(2a_1 a_2 - a_3\right) y^3 + \left(2a_1 a_3 + a_2^2 - a_4 - \frac{a_1^4}{2}\right) y^4 + o\left(y^4\right).$$

Or

$$f(g(y)) = y \underset{y\to 0}{=} y + o\left(y^4\right).$$

Donc par unicité du développement limité,

$$\begin{cases} -a_1 = 1 \\ a_1^2 - a_2 = 0 \\ 2a_1a_2 - a_3 = 0 \\ 2a_1a_3 + a_2^2 - a_4 - \frac{a_1^4}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = -1 \\ a_2 = a_1^2 = 1 \\ a_3 = 2a_1a_2 = -2 \\ a_4 = 2a_1a_3 + a_2^2 - \frac{a_1^4}{2} = 4 + 1 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2} \end{cases}$$

Conclusion, on retrouve bien que

$$\boxed{g(y) \underset{y\to 0}{=} -y + y^2 - 2y^3 + \frac{9y^4}{2} + o\left(y^4\right).}$$

Partie 7 : Calcul du développement limité de g, méthode 3

20. Par la question 14. on sait que g admet un développement limité d'ordre 3 en 0 : il existe $(b_0, b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$g'(y) \underset{y\to 0}{=} b_0 + b_1y + b_2y^2 + b_3y^3 + o\left(y^3\right).$$

Or g est une primitive de g sur J', donc par le théorème de primitivation des développements limités, on a

$$g(y) \underset{y\to 0}{=} b_0y + \frac{b_1}{2}y^2 + \frac{b_2}{3}y^3 + \frac{b_3}{4}y^4 + o\left(y^4\right).$$

Or on a $g(y) \underset{y\to 0}{=} a_1y + a_2y^2 + a_3y^3 + a_4y^4 + o\left(y^4\right)$. Donc par unicité du développement limité,

$$\begin{cases} b_0 = a_1 \\ \frac{b_1}{2} = a_2 \\ \frac{b_2}{3} = a_3 \\ \frac{b_3}{4} = a_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_0 = a_1 \\ b_1 = 2a_2 \\ b_2 = 3a_3 \\ b_3 = 4a_4. \end{cases}$$

Conclusion,

$$\boxed{g'(y) \underset{y\to 0}{=} a_1 + 2a_2y + 3a_3y^2 + 4a_4y^3 + o\left(y^3\right).}$$

21. Dans la partie 3 on a vu que $\frac{1}{f'(x)} \underset{x\to 0}{=} -1 - 2x - 4x^2 - 6x^3 + o\left(x^3\right)$. Or on sait également que $g(y) \underset{y\to 0}{=} a_1y + a_2y^2 + a_3y^3 + o\left(y^3\right) \underset{y\to 0}{\longrightarrow} 0$. Puis nous avions également calculé que

$$g(y)^2 \underset{y\to 0}{=} a_1^2y^2 + 2a_1a_2y^3 + \left(2a_1a_3 + a_2^2\right)y^4 + o\left(y^4\right) \underset{y\to 0}{=} a_1^2y^2 + 2a_1a_2y^3 + o\left(y^3\right).$$

Par suite,

$$g(y)^3 = g(y)g(y)^2 \underset{y\to 0}{=} \left(a_1y + a_2y^2 + a_3y^3 + o\left(y^3\right)\right)\left(a_1^2y^2 + 2a_1a_2y^3 + o\left(y^3\right)\right) \underset{y\to 0}{=} a_1^3y^3 + o\left(y^3\right).$$

Enfin,

$$o\left(g(y)^3\right) \underset{y\to 0}{=} o\left(y^3\right).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{f'(g(y))} &\underset{y\to 0}{=} -1-2g(y)-4g(y)^2-6g(y)^3+o\left(g(y)^3\right)\\
&\underset{y\to 0}{=} \begin{array}{llll} -1-2a_1y & -2a_2y^2 & -2a_3y^3 & +o\left(y^3\right)\\ & -4a_1^2y^2 & -8a_1a_2y^3 & +o\left(y^3\right)\\ & & -6a_1^3y^3 & +o\left(y^3\right)\\ & & & +o\left(y^3\right)\end{array}\\
&\underset{y\to 0}{=} -1-2a_1-\left(2a_2+4a_1^2\right)y^2-\left(2a_3+8a_1a_2+6a_1^3\right)y^3+o\left(y^3\right).
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\frac{1}{f'(g(y))} \underset{y\to 0}{=} -1-2a_1-\left(2a_2+4a_1^2\right)y^2-\left(2a_3+8a_1a_2+6a_1^3\right)y^3+o\left(y^3\right).}$$

22. Par les deux questions précédentes, on a

$$\begin{aligned}
g'(y) &\underset{y\to 0}{=} a_1+2a_2y+3a_3y^2+4a_4y^3+o\left(y^3\right)\\
\frac{1}{f'(g(y))} &\underset{y\to 0}{=} -1-2a_1-\left(2a_2+4a_1^2\right)y^2-\left(2a_3+8a_1a_2+6a_1^3\right)y^3+o\left(y^3\right).
\end{aligned}$$

Or on sait que pour tout $y\in J'$, (et donc notamment au voisinage de 0) on a $\frac{1}{f'(g(y))}=g'(y)$. Donc par unicité du développement limité,

$$\begin{cases} a_1=-1\\ 2a_2=-2a_1\\ 3a_3=-\left(2a_2+4a_1^2\right)\\ 4a_4=-\left(2a_3+8a_1a_2+6a_1^3\right)\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} a_1=-1\\ a_2=-a_1=1\\ a_3=-\frac{2a_2+4a_1^2}{3}=-\frac{2+4}{3}=-2\\ a_4=-\frac{2a_3+8a_1a_2+6a_1^3}{4}=-\frac{-4-8-6}{4}=\frac{18}{4}=\frac{9}{2}.\end{cases}$$

Rien à faire, ou trouve toujours les mêmes coefficients :

$$\boxed{g(y)\underset{y\to 0}{=} -y+y^2-2y^3+\frac{9y^4}{2}+o\left(y^4\right).}$$

Exercice II - Continuité, dérivabilité

On considère la fonction f définie par

$$f : x \mapsto \begin{cases} \mathrm{e}^{\frac{x^2}{x^2-1}} \text{ si } x \in \left]-1;1\right[\\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Partie 1 : Etude de f

1. (a) Pour tout $x \in \left]-1;1\right[$, on a

$$f(x) - f(0) = \mathrm{e}^{\frac{x^2}{x^2-1}} - \mathrm{e}^0 = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{1-x^2}} - 1 \underset{x\to 0}{=} \mathrm{e}^{-x^2(1+o(1))} - 1 \underset{x\to 0}{=} \mathrm{e}^{-x^2+o\left(x^2\right)} - 1.$$

Or $\mathrm{e}^u \underset{u\to 0}{=} 1 + u + o(u)$. Posons $u(x) \underset{x\to 0}{=} -x^2 + o\left(x^2\right) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. Alors $o\left(u(x)\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^2\right)$. Donc

$$f(x) - f(0) \underset{x\to 0}{=} 1 - x^2 + o\left(x^2\right) + o\left(x^2\right) - 1 \underset{x\to 0}{=} -x^2 + o\left(x^2\right).$$

Conclusion,

$$\boxed{f(x) - f(0) \underset{x\to 0}{\sim} -x^2.}$$

(b) On sait que deux équivalents ont même signe au voisinage du point considéré et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x^2 \leqslant 0$. Donc par la question précédente, pour tout x au voisinage de 0, on a

$$f(x) - f(0) \leqslant 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad f(x) \leqslant f(0).$$

Conclusion,

$$\boxed{f(0) = 1 \text{ est un maximum local de } f \text{ atteint en } x = 0.}$$

2. Pour tout $x \in \left]-1;1\right[$, $x^2 - 1 \neq 0$ donc f est bien définie et même $\mathscr{C}^1$ sur $\left]-1;1\right[$ comme composée de fonctions qui le sont et dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus,

$$\forall x \in \left]-1;1\right[, \qquad f'(x) = \left(\frac{x^2}{x^2-1}\right)' \mathrm{e}^{\frac{x^2}{x^2-1}} = \frac{2x\left(x^2-1\right) - x^2(2x)}{\left(x^2-1\right)^2} \mathrm{e}^{\frac{x^2}{x^2-1}} = -\frac{2x}{\left(x^2-1\right)^2} \mathrm{e}^{\frac{x^2}{x^2-1}}.$$

Conclusion, $\boxed{f \text{ est } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \left]-1;1\right[}$ et

$$\boxed{\forall x \in \left]-1;1\right[, \qquad f'(x) = -\frac{2x}{\left(x^2-1\right)^2} \mathrm{e}^{\frac{x^2}{x^2-1}}.}$$

3. Appliquons le théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$. Montrons que f est continue sur $\mathbb{R}_+$. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$. De plus,

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} 0 = 0 = f(1).$$

D'autre part,

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} x^2 - 1 = 0^-.$$

Donc

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{1}{x^2-1} = -\infty.$$

Puis

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{x^2}{x^2-1} = 1 \times -\infty = -\infty.$$

Par composition,

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \mathrm{e}^{\frac{x^2}{x^2-1}} = 0.$$

Donc

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = f(0) = 0.$$

Donc f est continue en 1 et donc sur $\mathbb{R}_+$.

Pour tout $x > 1$, $f(x) = 0$. Donc f est $\mathscr{C}^1$ sur $]1;+\infty[$ et pour tout $x > 0$, $f'(x) = 0$. Donc la limite de f' à droite existe et

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f'(x) = 0.$$

D'autre part, par la question précédente, f est aussi $\mathscr{C}^1$ sur $[0;1[$ et pour tout $x \in\ ]-1;1[$,

$$f'(x) = -\frac{2x}{(x^2-1)^2}\,\mathrm{e}^{\frac{x^2}{x^2-1}}.$$

Pour tout $x \in [0;1[$, posons $u(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$. Alors,

$$f'(x) = -\frac{2}{x^3}u(x)^2\,\mathrm{e}^{u(x)}.$$

Puisque $u(x) \underset{x\to 1 x<1}{-} \infty$, par croissance comparée, on sait que

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} u(x)^2\,\mathrm{e}^{u(x)} = 0.$$

Donc par produit,

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f'(x) = -2 \times 0 = 0.$$

Résumons :

- la fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$
- la fonction f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$
- les limites de f' à droite et à gauche existe et coïncident :

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f'(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f'(x) = 0$$

  i.e.

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x\neq 1}} f'(x) = 0.$$

Donc par le théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$, on en déduit que

$$\boxed{f \text{ est } \mathscr{C}^1 \text{ en 1 et donc sur } \mathbb{R}_+}$$

et de plus,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad f'(x) = \begin{cases} -\frac{2x}{(x^2-1)^2}\,\mathrm{e}^{\frac{x^2}{x^2-1}} & \text{si } x \in [0;1[\\ 0 & \text{si } x \in [1;+\infty[. \end{cases}}$$

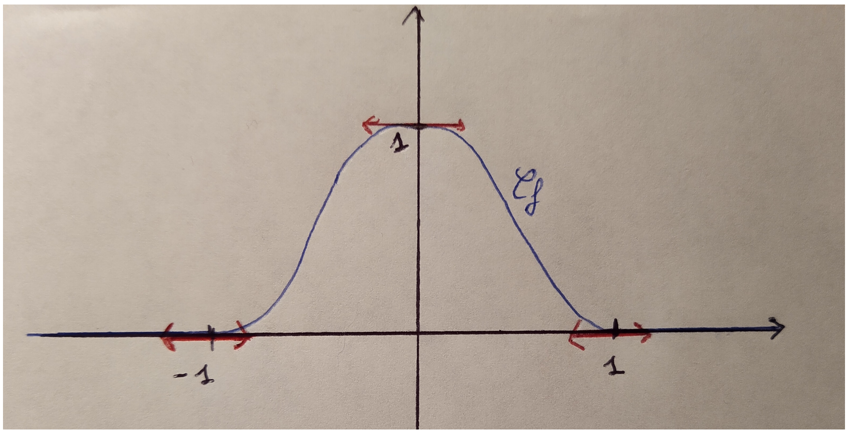
4. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}$ est centré en 0. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, si $x \in]-1;1[$, alors $-x \in]-1;1[$ et donc
$$f(-x) = \mathrm{e}^{\frac{(-x)^2}{(-x)^2-1}} = \mathrm{e}^{\frac{x^2}{x^2-1}} = f(x).$$
Si $x \in]-\infty;-1] \cup [1;+\infty[$, alors $-x]-\infty;-1] \cup [1;+\infty[$ et donc $f(-x) = 0 = f(x)$. Donc la fonction f est paire. Commençons donc par dresser son tableau sur $\mathbb{R}_+$. Pour tout $x \in [0;1[$, on a
$$f'(x) = -\frac{2x}{(x^2-1)^2}\,\mathrm{e}^{\frac{x^2}{x^2-1}} \leqslant 0.$$
Donc la fonction f est décroissante sur $[0;1]$ et constante sur $[1;+\infty[$. Ainsi :

x	0		1		$+\infty$
f	1	$\searrow$	0	$\rightarrow$	0

Conclusion, par parité,

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f	0	$\rightarrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\rightarrow$	0

5.



Partie 2 : Sur les dérivées de f

On admet dans la suite que f est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

6. Pour tout $x \in]0;1[$, posons $h = x - 1$ i.e. $x = 1 + h$ et alors $h \in]-1;0[$. Dès lors,

$$\begin{aligned}
f(x) = f(1+h) &= \mathrm{e}^{\frac{(1+h)^2}{(1+h)^2-1}} \\
&= \mathrm{e}^{\frac{1+2h+h^2}{2h+h^2}} \\
&= \mathrm{e}^{\frac{1+2h+h^2}{2h}\frac{1}{1+\frac{h}{2}}} \\
&\underset{h\to 0}{=} \mathrm{e}^{\frac{1+2h+h^2}{2h}\left(1-\frac{h}{2}+o(h)\right)} \\
&\underset{h\to 0}{=} \mathrm{e}^{\frac{1}{2h}\left(1-\frac{h}{2}+o(h)+2h+o(h)+o(h)\right)} \\
&\underset{h\to 0}{=} \mathrm{e}^{\frac{1}{2h}\left(1+\frac{3h}{2}+o(h)\right)} \\
&\underset{h\to 0}{=} \mathrm{e}^{\frac{1}{2h}-\frac{3}{4}+o(1)} \\
&\underset{h\to 0}{=} \mathrm{e}^{\frac{1}{2h}-\frac{3}{4}}\,\mathrm{e}^{o(1)} \\
&\underset{h\to 0}{=} \mathrm{e}^{\frac{1}{2h}-\frac{3}{4}}\,(1+o(1)) \\
&\underset{h\to 0}{=} \mathrm{e}^{\frac{1}{2h}-\frac{3}{4}} + o\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2h}-\frac{3}{4}}\right).
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{f(x) \underset{\substack{x\to 1\\ x<1}}{\sim} \mathrm{e}^{\frac{1}{2(x-1)}-\frac{3}{4}}.}$$

7. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par la question précédente, on a

$$(x-1)^n f(x) \underset{\substack{x\to 1\\ x<1}}{\sim} (x-1)^n\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2(x-1)}}\,\mathrm{e}^{-\frac{3}{4}}.$$

Posons $u = \frac{1}{x-1} \underset{\substack{x\to 1\\ x<1}}{\longrightarrow} -\infty$. Alors,

$$(x-1)^n\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2(x-1)}}\,\mathrm{e}^{-\frac{3}{4}} = \frac{\mathrm{e}^{\frac{u}{2}}}{u^n}\,\mathrm{e}^{-\frac{3}{4}} \underset{u\to -\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \text{par croissance comparée.}$$

Or deux équivalents ont même limite. Donc

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} (x-1)^n f(x) = 0.$$

Bien sûr, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\geqslant 1}} (x-1)^n f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\geqslant 1}} (x-1)^n \times 0 = 0$ et donc

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 0.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad f(x) \underset{x\to 1}{=} o\left((x-1)^n\right).}$$

8. Or on a admis que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et donc $\mathscr{C}^n$ en 1. Donc par la formule de Taylor-Young,

$$f(x) \underset{x\to 1}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-1)^k + o\left((x-1)^n\right).$$

Donc par unicité du développement limité, pour tout $k \in [\![0;n]\!]$,

$$f^{(k)}(1) = 0.$$

En particulier pour $k=n$, $f^{(n)}(1)=0$. Ceci étant vrai pour $n\in\mathbb{N}$ quelconque, on conclut que

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\qquad f^{(n)}(1)=0.}$$

On admet de même pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f^{(n)}(-1)=0$.

9. On procède par récurrence. On pose pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ la propriété :

   « $\exists\left(a_{n,1},\ldots,a_{n,n+2}\right)\in[-1;1]^{n+2}$, $a_{n,1}<a_{n,2}<\cdots<a_{n,n+2}$, $\forall k\in[\![1;n+2]\!]$, $f^{(n)}\left(a_{n,k}\right)=0$. »

   Initialisation. Si $n=0$, on sait que $f(-1)=f(1)=0$. Donc en posant $a_{0,1}=-1$ et $a_{0,2}=1$, on a bien $a_{0,1}<a_{0,2}$ et $f\left(a_{0,1}\right)=f\left(a_{0,2}\right)=0$. Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

   Hérédité. Soit $n\in\mathbb{N}$. Montrons que $\mathscr{P}(n)\ \Rightarrow\ \mathscr{P}(n+1)$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie et montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ l'est aussi. Par hypothèse de récurrence, il existe $\left(a_{n,1},\ldots,a_{n,n+2}\right)\in[-1;1]^{n+2}$ tel que $f^{(n)}\left(a_{n,1}\right)=\cdots=f\left(a_{n,n+2}\right)=0$. Soit $k\in[\![1;n+1]\!]$. Alors, puisque f est $\mathscr{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$, $g_n=f^{(n)}$ est continue sur $[a_{n,k};a_{n,k+1}]$, dérivable sur $]a_{n,k};a_{n,k+1}[$ et vérifie $g_n\left(a_{n,k}\right)=g_n\left(a_{n,k+1}\right)$. Donc par le théorème de Rolle, il existe $a_{n+1,k+1}\in\,]a_{n,k};a_{n,k+1}[$ tel que $g_n'\left(a_{n+1,k+1}\right)=f^{(n+1)}\left(a_{n+1,k+1}\right)=0$. Puisque pour tout $x>1$, $f(x)=0$, alors pour tout $x>1$, $f^{(n+1)}(x)=0$ et par continuité de $f^{(n+1)}$ en 1 (car f est $\mathscr{C}^{n+1}$ en 1), on a $f^{(n+1)}(1)=0$. De même $f^{(n+1)}(-1)=0$. Posons donc $a_{n+1,1}=-1$ et $a_{n+1,n+3}=1$. Alors on a bien

   $$\forall k\in[\![1;n+3]\!],\qquad f^{(n+1)}\left(a_{n+1,k}\right)=0.$$

   De plus, on a

   $$a_{n+1,1}=-1\leqslant a_{n,1}<a_{n+1,2}<a_{n,2}<\cdots<a_{n+1,n+2}<a_{n,n+2}\leqslant 1=a_{n+1,n+3}.$$

   Donc pour tout $k\in[\![1;n+3]\!]$, $a_{n+1,k}\in[-1;1]$ et

   $$a_{n+1,1}<a_{n+1,2}<\cdots<a_{n+1,n+2}<a_{n+1,n+3}.$$

   Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

   Conclusion,

   $$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\qquad \mathscr{P}(n)\text{ est vraie.}}$$

10. Soit $n\in\mathbb{N}$. Pour tout $x>1$, $f(x)=0$, donc pour tout $x>1$, $f^{(n)}(x)=0$. Puis, $f^{(n)}$ étant continue sur $\mathbb{R}$, on obtient que $f^{(n)}(1)=0$. Donc pour tout $x\geqslant 1$, $f^{(n)}(x)=0$. De même, pour tout $x\leqslant -1$, $f^{(n)}(x)=0$. De plus la fonction f étant $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ donc sur $[-1;1]$, on en déduit que la fonction $f^{(n)}$ est continue sur **le segment** $[-1;1]$. Or toute fonction continue sur un segment est bornée (et atteint ses bornes) donc il existe $M\in\mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x\in[-1;1]$, $\left|f^{(n)}(x)\right|\leqslant M$. Et puisque pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\,]-1;1[$, $\left|f^{(n)}(x)\right|=0\leqslant M$, on en déduit bien que

    $$\forall x\in\mathbb{R},\qquad \left|f^{(n)}(x)\right|\leqslant M.$$

    Conclusion,

    $$\boxed{\text{pour tout } n\in\mathbb{N}\text{, la fonction } f^{(n)} \text{ est bornée sur } \mathbb{R}.}$$

11. Par la question pour $n=1$, il existe $M\in\mathbb{R}$ tel que pour tout $t\in\mathbb{R}$, $|f'(t)|\leqslant 1$. Soient $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $x\neq y$. Alors la fonction f est continue sur $[x;y]$ (ou sur $[y;x]$) et dérivable sur $]x;y[$ (ou sur $]y;x[$). Donc par l'inégalité des accroissements finis,

    $$|f(x)-f(y)|\leqslant \sup_{t\in]x;y[}\left|f'(t)\right||x-y|\,.$$

    Or $\sup_{t\in]x;y[}|f'(t)|\leqslant M$. Donc

    $$|f(x)-f(y)|\leqslant M\,|x-y|\,,$$

    ce qui reste vrai si $x=y$. Conclusion,

    $$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est lipschitzienne sur } \mathbb{R}.}$$

Partie 3 : Sur les dérivées n-ième de u

On pose

$$\forall x \in \left]-1;1\right[, \qquad u(x) = \frac{1}{x^2-1}.$$

12. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $v_a : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{a\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x-a} \end{array}$. La fonction v_a est définie et même $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}\setminus\{a\}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\mathscr{P}(n) : \qquad \text{« } \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{a\}, \qquad v_a^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n\, n!}{(x-a)^{n+1}}. \text{ »}$$

Initialisation. Si $n = 0$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{a\}$,

$$\frac{(-1)^n\, n!}{(x-a)^{n+1}} = \frac{1}{x-a} = v_a(x) = v_a^{(0)}(x).$$

Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$. Supposons $\mathscr{P}(n)$. Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est alors aussi vraie. Par hypothèse de récurrence,

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{a\}, \qquad v_a^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n\, n!}{(x-a)^{n+1}}.$$

Donc $v_a^{(n)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{a\}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{a\}, \qquad v_a^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^n\, n!\,(-(n+1))}{(x-a)^{n+2}} = \frac{(-1)^{n+1}\,(n+1)!}{(x-a)^{n+2}}.$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{a\}, \qquad v_a^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n\, n!}{(x-a)^{n+1}}.}$$

13. Pour tout $x \in \left]-1;1\right[$, on a

$$u(x) = \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{x-1} \times \frac{1}{x+1} = v_1(x)v_{-1}(x).$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Les fonctions v_1 et v_{-1} sont n-fois dérivables sur $\left]-1;1\right[$ donc par la formule de Leibniz,

$$\forall x \in \left]-1;1\right[, \qquad u^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} v_1^{(k)}(x) v_{-1}^{(n-k)}(x).$$

Par la question précédente,

$$\begin{aligned} \forall x \in \left]-1;1\right[, \qquad u^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k\, k!}{(x-1)^{k+1}} \frac{(-1)^{n-k}\,(n-k)!}{(x-a)^{n-k+1}} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \frac{(-1)^k\, k!}{(x-1)^{k+1}} \frac{(-1)^{n-k}\,(n-k)!}{(x+1)^{n-k+1}} \\ &= \sum_{k=0}^{n} n! \frac{(-1)^n}{(x-1)^{k+1}\,(x+1)^{n-k+1}} \end{aligned}$$

Conclusion

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \left]-1;1\right[, \qquad u^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^n\, n!}{(x-1)^{k+1}\,(x+1)^{n-k+1}}.}$$

14. Soit $n \in \mathbb{N}$, par la question précédente, on a

$$\forall x \in \left]-1;1\right[, \qquad u^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n\, n!}{(x-1)\,(x+1)^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^k.$$

On reconnaît donc une somme géométrique de raison $q = \frac{x+1}{x-1}$. Or pour $x \in \left]-1;1\right[$, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{x-1} = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad x+1 = x-1 \qquad \text{car } x-1 \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 1 = -1 \text{ impossible.} \end{aligned}$$

Donc pour tout $x \in \left]-1;1\right[$, on a

$$\begin{aligned} \forall x \in \left]-1;1\right[, \qquad u^{(n)}(x) &= \frac{(-1)^n\, n!}{(x-1)\,(x+1)^{n+1}} \frac{1-\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{n+1}}{1-\frac{x+1}{x-1}} \\ &= \frac{(-1)^n\, n!}{(x-1)\,(x+1)^{n+1}} \frac{(x-1)^{n+1}-(x+1)^{n+1}}{(x-1)^{n+1}} \frac{x-1}{x-1-(x+1)} \\ &= \frac{(-1)^n\, n!}{(x-1)^{n+1}\,(x+1)^{n+1}} \left((x-1)^{n+1}-(x+1)^{n+1}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{(-1)^{n+1}\, n!}{2} \left[\frac{1}{(x+1)^{n+1}} - \frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right]. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \left]-1;1\right[, \qquad u^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n\, n!}{2}\left[\frac{1}{(x-1)^{n+1}} - \frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right].}$$

15. Par le théorème de décomposition en éléments simples, on sait qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall x \in \left]-1;1\right[, \qquad u(x) = \frac{1}{x^2-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}.$$

Méthode 1. Donc

$$\forall x \in \left]-1;1\right[, \qquad u(x) = \frac{ax+a+bx-b}{x^2-1} = \frac{(a+b)\,x+a-b}{x^2-1}.$$

On note alors qu'il suffit de prendre

$$\begin{cases} a+b=0 \\ a-b=1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a+b=\frac{1}{2} & L_1 \leftarrow \frac{L_1+L_2}{2} \\ b=-\frac{1}{2} & L_2 \leftarrow \frac{L_1-L_2}{2}. \end{cases}$$

Donc

$$\forall x \in \left]-1;1\right[, \qquad u(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right).$$

Méthode 2.

$$\forall x \in \left]-1;1\right[, \qquad (x-1)\,u(x) = \frac{1}{x+1} = a + (x-1)\,\frac{b}{x+1}.$$

Donc par passage à la limite $x \to 1$,

$$\frac{1}{2} = a.$$

De même

$$\forall x \in \left]-1;1\right[, \qquad (x+1)\,u(x) = \frac{1}{x-1} = (x+1)\,\frac{a}{x-1} + b.$$

Donc par passage à la limite $x \to -1$,
$$-\frac{1}{2} = b.$$
On retrouve donc
$$\forall x \in \left]-1;1\right[, \qquad u(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right).$$
Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction u est $\mathscr{C}^n$ sur $]-1;1[$ et
$$\forall x \in \left]-1;1\right[, \qquad u^{(n)}(x) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n)} - \left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n)}\right) = \frac{v_1^{(n)}(x) - v_{-1}^{(n)}(x)}{2}.$$
Donc par la question 12.,
$$\forall x \in \left]-1;1\right[, \qquad u^{(n)}(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{(-1)^n\, n!}{(x-1)^{n+1}} - \frac{(-1)^n\, n!}{(x+1)^{n+1}}\right).$$
Conclusion, on retrouve bien que
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \left]-1;1\right[, \qquad u^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n\, n!}{2}\left[\frac{1}{(x-1)^{n+1}} - \frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right].}$$

16. Si $n = 0$, on a
$$\forall x \in \left]-1;1\right[, \qquad w(x) = \frac{x^2}{x^2-1}.$$
Si $n = 1$,
$$\forall x \in \left]-1;1\right[, \qquad w'(x) = \frac{2x\left(x^2-1\right) - x^2\left(2x\right)}{\left(x^2-1\right)^2} = -\frac{2x}{\left(x^2-1\right)^2}.$$
Soit maintenant $n \geqslant 2$. Pour tout $\forall x \in]-1;1[$, on a $w(x) = x^2 u(x)$. Donc par la formule de Leibniz, pour tout $x \in]-1;1[$,
$$\begin{aligned}
w^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(x^2\right)^{(k)} u^{(n-k)}(x) \\
&= \left(x^2\right) u^{(n)}(x) + n\left(x^2\right)' u^{(n-1)}(x) + \frac{n(n-1)}{2}\left(x^2\right)'' u^{(n-2)}(x) + 0 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \text{car pour tout } k \geqslant 3,\ \left(x^2\right)^{(k)} = 0 \\
&= x^2 \frac{(-1)^n\, n!}{2}\left[\frac{1}{(x-1)^{n+1}} - \frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right] \\
&\quad + n2x\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{2}\left[\frac{1}{(x-1)^n} - \frac{1}{(x+1)^n}\right] \\
&\qquad + \frac{n(n-1)}{2}2\frac{(-1)^{n-2}(n-2)!}{2}\left[\frac{1}{(x-1)^{n-1}} - \frac{1}{(x+1)^{n-1}}\right] \\
&= \frac{(-1)^n\, n!}{2}\left[\frac{x^2}{(x-1)^{n+1}} - \frac{x^2}{(x+1)^{n+1}} - \frac{2x}{(x-1)^n} + \frac{2x}{(x+1)^n} + \frac{1}{(x-1)^{n-1}} - \frac{1}{(x+1)^{n-1}}\right] \\
&= \frac{(-1)^n\, n!}{2}\left[\frac{x^2 - 2x(x-1) + (x-1)^2}{(x-1)^{n+1}} - \frac{x^2 - 2x(x+1) + (x+1)^2}{(x+1)^{n+1}}\right] \\
&= \frac{(-1)^n\, n!}{2}\left[\frac{1-4x}{(x-1)^{n+1}} - \frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right].
\end{aligned}$$
Conclusion,
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \left]-1;1\right[, \qquad w^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n\, n!}{2}\left[\frac{1-4x}{(x-1)^{n+1}} - \frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right].}$$

Exercice III - Ensembles et applications

Partie 1 : Applications

Soit E un ensemble et $f \in \mathscr{F}(E,E)$ telle que $f \circ f = f$.

1. Supposons que f est injective. Montrons alors que $f = \mathrm{Id}_E$. Soit $x \in E$. Montrons donc que $f(x) = x$. Par définition, on a
$$f \circ f(x) = f(x).$$
Posons $y = f(x)$ alors,
$$f(y) = f(x).$$
Or par hypothèse, f est injective. Donc
$$y = x \qquad \text{i.e.} f(x) = x.$$
Ceci étant vrai pour tout $x \in E$, on obtient que $f = \mathrm{Id}_E$. On a donc montré que
$$f \text{ injective} \qquad \Rightarrow \qquad f = \mathrm{Id}_E.$$
Réciproquement, si $f = \mathrm{Id}_E$, alors directement, f est bijective et donc notamment injective (ou encore pour tout $(x,y) \in E^2$, si $f(x) = f(y)$ alors $x = f(x) = f(y) = y$ et donc f est bien injective). Conclusion,
$$\boxed{f \text{ injective} \qquad \Leftrightarrow \qquad f = \mathrm{Id}_E.}$$

2. On suppose que f est surjective. Montrons alors que $f = \mathrm{Id}_E$ i.e. $\forall x \in E,\ f(x) = x$. Soit $x \in E$. Puisque f est surjective, il existe $u \in E$ tel que $f(u) = x$. Donc en composant par f, on obtient
$$f \circ f(u) = f(x).$$
Or par définition $f \circ f = f$. Donc
$$f(u) = f(x).$$
Or par définition de u, $f(u) = x$. D'où
$$x = f(u) = f(x).$$
Ceci étant vrai pour x quelconque dans E. On en déduit que $f = \mathrm{Id}_E$. On a donc établi que
$$f \text{ surjective} \qquad \Rightarrow \qquad f = \mathrm{Id}_E.$$
Réciproquement, si $f = \mathrm{Id}_E$, alors f est bijective et donc surjective (ou encore pour tout $y \in E$, on a $y = f(y)$ donc y admet au moins un antécédent (lui-même) donc f est surjective). Conclusion,
$$\boxed{f \text{ surjective} \qquad \Leftrightarrow \qquad f = \mathrm{Id}_E.}$$

3. Prenons $E = \mathbb{R}$ et $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -x \end{array}$. Alors $f \circ f = f$ et pourtant $f \neq \mathrm{Id}_E$. (on pouvait aussi prendre $f : x \mapsto |x|$).
Autre exemple, pour $n \in \mathbb{N}^*$, prenons $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $f : M \mapsto \frac{M + {}^tM}{2}$. Alors pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$,
$$f(f(M)) = \frac{f(M) + {}^tf(M)}{2} = \frac{\frac{M+{}^tM}{2} + {}^t\left(\frac{M+{}^tM}{2}\right)}{2} = \frac{\frac{M+{}^tM}{2} + \frac{{}^tM+M}{2}}{2} = \frac{M + {}^tM}{2} = f(M).$$
Donc $f \circ f = f$ mais $f \neq \mathrm{Id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$ (exemple si $M \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R}) \setminus \{0_n\}$, on a $f(M) = 0_n \neq M$).

Partie 2 : Ensembles

On considère l'application suivante :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathscr{P}(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{P}(\mathbb{R}) \\ E & \mapsto & (E \cap A) \cup B. \end{array}$$

4. On a
$$f(\emptyset) = (\emptyset \cap A) \cup B = \emptyset \cup B = B,$$
et
$$f(A) = (A \cap A) \cup B = A \cup B,$$
et
$$f(B) = (A \cap B) \cup B.$$
Or $A \cap B \subseteq B$, donc $f(B) = A \cap B$. Enfin,
$$f(\mathbb{R}) = (\mathbb{R} \cap A) \cup B = A \cup B.$$
Conclusion,
$$\boxed{f(\emptyset) = 0, \qquad f(A) = A \cup B, \qquad f(B) = A \cap B, f(\mathbb{R}) = A \cup B.}$$

5. Si $A = \emptyset$. Alors, pour tout $E \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$
$$f(E) = (E \cap \emptyset) \cup B = \emptyset \cup B = B.$$
Dans ce cas, f est l'application constante :
$$\boxed{\begin{array}{rcl} \mathscr{P}(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{P}(\mathbb{R}) \\ E & \mapsto & B. \end{array}}$$

6. Si $B = \mathbb{R}$. Alors pour tout $E \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$,
$$f(E) = (E \cap A) \cup B = (E \cap A) \cup \mathbb{R} = \mathbb{R}.$$
Dans ce cas, f est aussi une application constante :
$$\boxed{\begin{array}{rcl} \mathscr{P}(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{P}(\mathbb{R}) \\ E & \mapsto & \mathbb{R}. \end{array}}$$

7. Soit $E \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$ tel que $B \subseteq E \subseteq A \cup B$.
   (a) Soit $x \in E$. Puisque $E \subseteq A \cup B$, alors $x \in A \cup B$.
   Premier cas, si $x \in A$, alors comme on a aussi par définition $x \in E$ on obtient que $x \in E \cap A$. Donc $x \in (E \cap A) \cup B = f(E)$.
   Deuxième cas, si $x \notin A$, comme $x \in A \cup B$, alors $x \in B$. Donc $x \in (E \cap A) \cup B = f(E)$.
   Donc dans tous les cas, $x \in f(E)$. Conclusion,
$$\boxed{(x \in E) \Rightarrow (x \in f(E)) \qquad \text{i.e.} \qquad E \subseteq f(E).}$$
   (b) Réciproquement, si $x \in f(E) = (E \cap A) \cup B$.
   Premier cas, si $x \in E \cap A$, alors $x \in E$.
   Deuxième cas, si $x \in B$. Par hypothèse, on a $B \subseteq E$, donc $x \in E$.
   Ainsi, dans tous les cas $x \in E$. D'où $(x \in f(E)) \Rightarrow (x \in E)$. Donc $f(E) \subseteq E$. Or par la question précédente, $E \subseteq f(E)$. Conclusion,
$$\boxed{f(E) = E.}$$

8. Soit $E \in \operatorname{Im}(f)$. Autrement dit, E admet un antécédent par f : il existe $F \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$ tel que $E = f(F) = (F \cap A) \cup B$. Dans ce cas, on obtient que
$$B \subseteq E.$$
Puis $F \cap A \subseteq A$. Donc $(F \cap A) \cup B \subseteq A \cup B$. D'où $E \subseteq A \cup B$. Conclusion,
$$\boxed{B \subseteq E \subseteq A \cup B.}$$

9. Soit $E \in \operatorname{Im}(f)$. Alors par la question précédente, $B \subseteq E \subseteq A \cup B$. Donc par la question 7. on en déduit que $E = f(E)$. Donc
$$\operatorname{Im}(f) \subseteq \{E \in \mathscr{P}(\mathbb{R}) \mid E = f(E)\}.$$
Réciproquement soit $E \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$ tel que $E = f(E)$. Alors E admet bien un antécédent par f (lui-même) donc E est dans l'image de f : $E \in \operatorname{Im}(E)$. Donc
$$\{E \in \mathscr{P}(\mathbb{R}) \mid E = f(E)\} \subseteq \operatorname{Im}(f).$$
Conclusion,
$$\boxed{\operatorname{Im}(f) = \{E \in \mathscr{P}(\mathbb{R}) \mid E = f(E)\}.}$$

10. Soit $E \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$. Posons $F = f(E)$. Alors $F \in \operatorname{Im}(f)$. Donc par la question précédente, $f(F) = F$. Autrement dit,
$$f(f(E)) = f(E).$$
Ceci étant vrai pour $E \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$ quelconque, on en conclut que
$$\boxed{f \circ f = f.}$$

11. Par la question précédente, on a $f \circ f = f$. On en déduit donc de la partie 11 :
$$\begin{aligned}
f \text{ est bijective} \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} f \text{ est surjective} \\ f \text{ est injective} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} f = \operatorname{Id}_{\mathscr{P}(\mathbb{R})} \\ f = \operatorname{Id}_{\mathscr{P}(\mathbb{R})} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad f = \operatorname{Id}_{\mathscr{P}(\mathbb{R})} \\
&\Leftrightarrow \quad \forall E \in \mathscr{P}(\mathbb{R}), \qquad f(E) = E.
\end{aligned}$$
En particulier, si $E = \emptyset$, on a
$$\emptyset = f(\emptyset) = (\emptyset \cap A) \cup B = B.$$
D'autre part, $E = \mathbb{R}$, on a
$$bbR = f(\mathbb{R}) = (\mathbb{R} \cap A) \cup B = A \cup B = A \cup \emptyset = A.$$
Donc si f est bijective, alors $A = \mathbb{R}$ et $B = \emptyset$. Réciproquement, si $A = \mathbb{R}$ et $B = \emptyset$, alors pour tout $E \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$,
$$f(E) = (E \cap \mathbb{R}) \cup \emptyset = E \cup \emptyset = E.$$
Donc $f = \operatorname{Id}_{\mathscr{P}(\mathbb{R})}$ et donc f est bien bijective. Conclusion,
$$\boxed{f \text{ est bijective} \qquad \Leftrightarrow \qquad A = \mathbb{R} \text{ et } B = \emptyset.}$$