Devoir Maison 7
suites numériques, polynômes, espaces vectoriels

A faire pour le vendredi 11 Mars

Exercice I - Suite implicite

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'équation $\ln(x) + nx = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$.
   On note x_n cette solution.
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée.
3. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante, que peut-on en déduire ?
4. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.
5. (a) Réciter et redémontrer la proposition I.7 chapitre 8.
   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < x_n < \frac{1}{\sqrt{n}}$.
   (c) Retrouver le résultat de la question 4.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $y_n = nx_n$.

6. Montrer que $y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
7. Simplifier pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $y_n + \ln(y_n)$.
8. En déduire un équivalent simple de y_n en $+\infty$.
9. Montrer que $x_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{\ln(n)}{n} - \frac{\ln(\ln(n))}{n} + \frac{\ln(\ln(n))}{n\ln(n)} + o\left(\frac{1}{n\ln(n)}\right)$.

Exercice II - Suite récurrente

On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \frac{3}{u_n} \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

Les parties I et II sont indépendantes, mais l'on pourra vérifier utilement la cohérence des résultats. La partie III utilise plus particulièrement la partie II.

Partie 1 : Par de l'adjacente

1. Calculer v_0, u_1, v_1, u_2, v_2.
2. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bien définies et strictement positives.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{(u_n-v_n)^2}{2(u_n+v_n)}$.
4. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant v_n$.
5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - v_n \leqslant \frac{u_0-v_0}{2^n}$.
6. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
7. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent et déterminer leur limite.

Partie 2 : Par une étude de fonction

On considère la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x^2+3}{2x}. \end{array}$$

On pose également $g : x \mapsto f(x) - x$. On admet que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existent.

8. Préciser le comportement asymptotique de f en $+\infty$ *(asymptote/direction asymptotique, position locale de la courbe par rapport à cette possible asymptote).*

9. Dresser le tableau de variation complet de f sur $\mathbb{R}_+^*$.

10. Déterminer le signe de g sur $\mathbb{R}_+^*$.

11. Montrer que f est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne sur $\left[\sqrt{3};+\infty\right[$.

12. A l'aide de f, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant \sqrt{3}$.

13. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement monotone.

14. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.

15. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - \sqrt{3} \leqslant \frac{u_0-\sqrt{3}}{2^n}$.

Partie 3 : Petit détour découverte du côté des séries (pensez à prendre votre appareil photo)

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(u_k - \sqrt{3}\right)$.

16. Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. On note ℓ sa limite.

17. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $N \geqslant n+1$, on a
$$0 \leqslant S_N - S_n \leqslant \frac{1 - \frac{1}{2^{N-n}}}{2^n}.$$

18. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant \ell - S_n \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$.

Exercice III - Polynômes et espaces vectoriels

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose

$$\Delta(P) = X\left(P(X) - P(X-1)\right).$$

1. Calculer $\Delta(1)$, $\Delta(X)$, $\Delta\left(X^2\right)$ et $\Delta\left(\frac{X^2+X}{2}\right)$.

On considère les ensembles suivants :

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(\Delta) &= \left\{ P \in \mathbb{R}_n[X] \;\middle|\; \Delta(P) = 0_{\mathbb{R}[X]} \right\}. \\ \mathrm{Im}(\Delta) &= \left\{ Q \in \mathbb{R}[X] \mid \exists P \in \mathbb{R}_n[X],\ \Delta(P) = Q \right\} \\ F_0 &= \left\{ P \in \mathbb{R}[X] \mid P(0) = 0 \right\}. \end{aligned}$$

Partie 1 : Un peu d'algèbre linéaire

2. Montrer que F_0 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

3. Montrer que $\mathrm{Ker}(\Delta)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$.

4. Montrer que $\mathrm{Im}(\Delta)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

5. Montrer que $\mathrm{Im}(\Delta) \subseteq F_0$.

Partie 2 : Détermination du noyau

6. Soit $P \in \operatorname{Ker}(\Delta)$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(k) = P(0)$.

7. Déterminer $\operatorname{Ker}(\Delta)$ et en préciser une base.

8. Montrer que $\operatorname{Ker}(\Delta)$ et F_0 sont supplémentaires dans $\mathbb{R}[X]$.

Partie 3 : Détermination de l'image

9. Soient $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $d = \deg(P)$. On suppose que $d \geqslant 1$ et on note $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$. Montrer que

$$\Delta(P) = \sum_{j=0}^{d} \left[a_j - \sum_{k=j}^{d} \left(a_k \binom{k}{j} (-1)^{k-j} \right) \right] X^{j+1}.$$

10. En déduire $\deg(\Delta(P))$ et préciser son terme dominant.

11. Montrer que $\operatorname{Im}(\Delta) \subseteq \mathbb{R}_n[X]$.

Pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, on pose

$$P_k = -\prod_{i=0}^{k-1} (i - X).$$

12. Montrer par récurrence que pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, $\operatorname{Vect}\left(X, X^2, \ldots, X^k\right) \subseteq \operatorname{Vect}(P_1, P_2, \ldots, P_k)$.
Indication : on pourra effectuer la division euclidienne de X^{k+1} par P_{k+1}.

13. Pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, calculer $\Delta(P_k)$.

14. En déduire que $(P_k)_{k \in [\![1;n]\!]}$ est une base de $\operatorname{Im}(\Delta)$.

Partie 4 : Parce que Gauss avec sa somme des entiers est un petit joueur

On suppose $n \geqslant 2$ et on fixe $p \in [\![2;n]\!]$.

15. Montrer qu'il existe un unique polynôme $S_p \in \mathbb{R}_n[X]$ vérifiant

$$\Delta(S_p) = X^p \qquad \text{et} \qquad S_p(0) = 0.$$

16. Montrer que $X^2 + X$ divise S_p.

17. Montrer puis admirer que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\sum_{k=1}^{N} k^p = S_{p+1}(N).$$

18. (a) Calculer S_5.
    (b) Déterminer la décomposition en produit de facteurs irréductibles S_5 dans $\mathbb{R}[X]$.
    (c) En déduire $\sum_{k=1}^{n} k^4$.
    On donnera le résultat sous forme d'une fraction dont le numérateur est un produit d'entiers