Correction du Devoir Maison 7 suites numériques, polynômes, espaces vectoriels

A faire pour le vendredi 11 Mars

Exercice I - Suite implicite

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère la fonction $f_n : x \mapsto \ln(x) + nx$. La fonction f_n est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$, continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que somme d'une fonction strictement croissante, ln, et d'une fonction croissante $x \mapsto nx$ (constante si $n = 0$). De plus,
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f_n(x) = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty.$$
Donc $0 \in \left]\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x); \lim_{x\to+\infty} f(x)\right[$. Donc par le théorème de la bijection (ou le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires), il existe un unique $x_n \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $f_n(x_n) = 0$:
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \exists! x_n \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \ln(x_n) + nx_n = 0.}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On observe que
$$f_n(1) = \ln(1) + n = n \geqslant 0 = f_n(x_n).$$
Donc par la croissance de f_n, on en déduit que
$$1 \geqslant x_n.$$
De plus par construction, $x_n \in \mathbb{R}_+^*$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < x_n \leqslant 1$. Conclusion,
$$\boxed{\text{La suite } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est minorée par } 0, \text{ majorée par } 1 \text{ et donc bornée.}}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculons,
$$f_{n+1}(x_n) = \ln(x_n) + (n+1)x_n = \ln(x_n) + nx_n + x_n.$$
Or $\ln(x_n) + nx_n = 0$ par définition de x_n. Donc
$$f_{n+1}(x_n) = x_n > 0 = f_{n+1}(x_{n+1}).$$
Or f_{n+1} est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc $x_n > x_{n+1}$. Ceci étant vrai pour n quelconque :
$$\boxed{\text{la suite } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est strictement décroissante.}}$$
Or la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0. Donc par le théorème de convergence monotone, on en déduit que
$$\boxed{\text{la suite } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge.}}$$

4. Par la question précédente, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Notons ℓ sa limite. Par la question 2.

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 < x_n \leqslant 1.$$

Donc par passage à la limite, $\ell \in [0;1]$ *(les inégalités strictes deviennent...)* Supposons que $\ell > 0$. Alors par continuité de ln sur $\mathbb{R}_+^*$, on a

$$\ln(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(\ell).$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\ln(x_n) + n x_n = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x_n = -\frac{\ln(x_n)}{n}.$$

Donc par passage à la limite,

$$\ell = 0.$$

Ce qui contredit l'assertion $\ell > 0$. Donc *non* $(\ell > 0)$ est vraie i.e. $\ell \leqslant 0$. Or $\ell \in [0;1]$. Conclusion, $\ell = 0$:

$$\boxed{\text{la suite } (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge vers } 0.}$$

5. (a) Montrons que

$$\forall x \in \left]-1;+\infty\right[, \qquad \ln(1+x) \leqslant x.$$

Posons $h : x \mapsto x - \ln(1+x)$. La fonction h est bien définie et même dérivable sur $]-1;+\infty[$. De plus,

$$\forall x \in \left]-1;+\infty\right[, \qquad h'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}.$$

Or $h(0) = 0$ et donc

x	-1		0		$+\infty$
h'		$-$	0	$+$	
h		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Ainsi, pour tout $x \in \left]-1;+\infty\right[$, $h(x) \geqslant 0$ i.e. $x \geqslant \ln(1+x)$. Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \left]-1;+\infty\right[, \qquad \ln(1+x) \leqslant x.}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Avec les notations de la question 1.

$$f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) + \frac{n}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = -\ln\left(\sqrt{n}\right) + \sqrt{n}$$

Par la question précédente avec $x = \sqrt{n} - 1$ on a $\ln\left(\sqrt{n}\right) \leqslant \sqrt{n} - 1$. Donc

$$-\ln\left(\sqrt{n}\right) \geqslant 1 - \sqrt{n}.$$

Ainsi,

$$f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \geqslant 1 - \sqrt{n} + \sqrt{n} = 1 > 0 = f_n(x_n).$$

Or f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc

$$\frac{1}{\sqrt{n}} > x_n.$$

Or par construction, $x_n > 0$. Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 < x_n < \frac{1}{\sqrt{n}}.}$$

(c) Puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$. On en déduit de la question précédente, par le théorème d'encadrement, on retrouve que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} x_n = 0.}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $y_n = nx_n$.

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$0 = \ln(x_n) + nx_n \qquad \Leftrightarrow \qquad nx_n = -\ln(x_n) \qquad \Leftrightarrow \qquad y_n = -\ln(x_n).$$

Or $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $-\ln(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Conclusion,

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} y_n = +\infty.}$$

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$y_n + \ln(y_n) = nx_n + \ln(nx_n) = nx_n + \ln(n) + \ln(x_n) = \ln(x_n) + nx_n + \ln(n).$$

Or par construction de x_n, $\ln(x_n) + nx_n = 0$. Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad y_n + \ln(y_n) = \ln(n).}$$

8. Puisque $y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, alors,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(y_n)}{y_n} = \lim_{u\to+\infty} \frac{u}{\ln(u)} = 0 \qquad \text{par croissance comparée.}$$

Donc $\ln(y_n) \underset{n\to+\infty}{\ll} y_n$. Donc, par la question précédente,

$$\ln(n) = y_n + \ln(y_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} y_n.$$

Conclusion,

$$\boxed{y_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n).}$$

9. Par la question précédente, on a $y_n = \ln(n) + o(\ln(n))$. De plus,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad y_n + \ln(y_n) = \ln(n) \qquad \Leftrightarrow \qquad y_n = \ln(n) - \ln(y_n).$$

Donc

$$\begin{aligned} y_n &\underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) - \ln(\ln(n) + o(\ln(n))) \\ &\underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) - \ln(\ln(n)) + \ln(1 + o(1)) \\ &\underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) - \ln(\ln(n)) + o(1). \end{aligned}$$

En réinjectant dans l'égalité $y_n = \ln(n) - \ln(y_n)$, on obtient que

$$\begin{aligned} y_n &\underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) - \ln\left(\ln(n) - \ln\left(\ln(n)\right) + o\left(1\right)\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) - \ln\left(\ln(n)\right) - \ln\left(1 - \frac{\ln\left(\ln(n)\right)}{\ln(n)} + o\left(\frac{1}{\ln(n)}\right)\right). \end{aligned}$$

Posons $u(n) \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{\ln(\ln(n))}{\ln(n)} + o\left(\frac{1}{\ln(n)}\right)$. Alors,

- $u(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
- De plus,

$$u(n)^2 \underset{n\to+\infty}{=} \frac{\ln^2\left(\ln(n)\right)}{\ln^2(n)} + o\left(\frac{\ln\left(\ln(n)\right)}{\ln^2(n)}\right) + o\left(\frac{1}{\ln^2(n)}\right).$$

  Or, par croissance comparée,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln^2\left(\ln(n)\right)}{\ln^2(n)} \times \ln(n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln^2\left(\ln(n)\right)}{\ln(n)} = \lim_{u\to+\infty} \frac{\ln^2\left(u\right)}{u} = 0.$$

  Donc $\frac{\ln^2(\ln(n))}{\ln^2(n)} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{\ln(n)}\right)$. De même,

$$o\left(\frac{\ln\left(\ln(n)\right)}{\ln^2(n)}\right) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{\ln(n)}\right) \qquad \text{et} \qquad o\left(\frac{1}{\ln^2(n)}\right) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{\ln(n)}\right).$$

  D'où

$$u(n)^2 \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{\ln(n)}\right).$$

- Dès lors, $o\left(u(n)^2\right) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{\ln(n)}\right)$.

Or $\ln\left(1+u\right) \underset{u\to0}{=} u - \frac{u^2}{2} + o\left(u^2\right)$.

NB : il est important d'aller à l'ordre u^2, car ici $o\left(u(n)\right) \underset{u\to0}{=} o\left(\frac{\ln(\ln(n))}{\ln(n)}\right)$ et non $o\left(\frac{1}{\ln(n)}\right)$!

Ainsi,

$$\begin{aligned} y_n &\underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) - \ln\left(\ln(n)\right) + \frac{\ln\left(\ln(n)\right)}{\ln(n)} + o\left(\frac{1}{\ln(n)}\right) + o\left(\frac{1}{\ln(n)}\right) + o\left(\frac{1}{\ln(n)}\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) - \ln\left(\ln(n)\right) + \frac{\ln\left(\ln(n)\right)}{\ln(n)} + o\left(\frac{1}{\ln(n)}\right). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{x_n = \frac{y_n}{n} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{\ln(n)}{n} - \frac{\ln\left(\ln(n)\right)}{n} + \frac{\ln\left(\ln(n)\right)}{n\ln(n)} + o\left(\frac{1}{n\ln(n)}\right).}$$

Exercice II - Suite récurrente

On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \frac{3}{u_n} \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

Partie 1 : Par de l'adjacente

1. On calcule :

$$\begin{aligned} u_0 &= 2, & v_0 &= \frac{3}{2}, \\ u_1 &= \frac{2+\frac{3}{2}}{2} = \frac{7}{4}, & v_1 &= \frac{12}{7}, \\ u_2 &= \frac{\frac{7}{4}+\frac{12}{7}}{2} = \frac{49+48}{56} = \frac{97}{56}, & v_2 &= \frac{56}{97}. \end{aligned}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $\mathscr{P}(n)$: « u_n et v_n existent et $u_n > 0$ et $v_n > 0$ ».

   Initialisation. Si $n = 0$, alors par définition, u_0 existe et $u_0 > 0$. Donc $v_0 = \frac{3}{2}$ aussi. Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

   Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie donc u_n et v_n existent et sont strictement positifs. Donc $u_n + v_n > 0$. Donc $u_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}$ existe et est strictement positif. Puis, il en va de même pour $v_{n+1} = \frac{3}{u_{n+1}}$. Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

   Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie et donc

$$\boxed{\text{les suites } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ sont bien définies et strictement positives.}}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} - \frac{3}{u_{n+1}} = \frac{u_n+v_n}{2} - \frac{6}{u_n+v_n} = \frac{u_n^2 + 2u_nv_n + v_n^2 - 12}{2(u_n+v_n)}.$$

   Or $u_nv_n = u_n\frac{3}{u_n} = 3$ donc $12 = 4u_nv_n$. Ainsi,

$$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{u_n^2 + 2u_nv_n + v_n^2 - 4u_nv_n}{2(u_n+v_n)} = \frac{u_n^2 - 2u_nv_n + v_n^2}{2(u_n+v_n)} = \frac{(u_n-v_n)^2}{2(u_n+v_n)}.$$

   Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{(u_n-v_n)^2}{2(u_n+v_n)}.}$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par la question 2. on sait que $u_n > 0$ et $v_n > 0$, donc $2(u_n+v_n) > 0$. De plus, $(u_n - v_n)^2 \geqslant 0$ donc $\frac{(u_n-v_n)^2}{2(u_n+v_n)} \geqslant 0$. Conclusion, par la question précédente, $u_{n+1} - v_{n+1} \geqslant 0$ i.e. $u_{n+1} \geqslant v_{n+1}$. Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant v_n$. On note que cela reste vrai si $n = 0$: $u_0 = 2 > \frac{3}{2} = v_0$. Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \geqslant v_n.}$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par la question 3., on a

$$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{u_n - v_n}{2}\frac{u_n - v_n}{u_n + v_n}.$$

Or puisque $v_n > 0$,

$$\frac{u_n - v_n}{u_n + v_n} < \frac{u_n}{u_n + v_n} < \frac{u_n + v_n}{u_n + v_n} = 1.$$

Par la question précédente, $u_n - v_n \geqslant 0$, donc

$$\frac{u_n - v_n}{2}\frac{u_n - v_n}{u_n + v_n} \leqslant \frac{u_n - v_n}{2} \qquad \Leftrightarrow \qquad u_{n+1} - v_{n+1} \leqslant \frac{u_n - v_n}{2}.$$

On obtient une suite « sous-géométrique ». Donc par récurrence,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n - v_n \leqslant \frac{u_0 - v_0}{2^n}.}$$

6. Par les deux questions précédentes, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leqslant u_n - v_n \leqslant \frac{u_0 - v_0}{2^n}.$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_0 - v_0}{2^n} = 0 = \lim\limits_{n\to+\infty} 0$. Donc par le théorème d'encadrement,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0.$$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + v_n}{2} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2}.$$

Donc par la question 4.,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} - u_n \leqslant 0.$$

Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Puis par passage à l'inverse, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{3}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Conclusion, on a bien démontré que

$$\boxed{\text{les suites } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ sont adjacentes.}}$$

7. Puisque les deux suites sont adjacentes, on en déduit qu'elles convergent vers une limite commune. Notons ℓ cette limite. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{3}{u_n} \Leftrightarrow u_n v_n = 3$. Donc par passage à la limite,

$$\ell^2 = 3 \qquad \Leftrightarrow \qquad \ell = \sqrt{3} \text{ OU } \ell = -\sqrt{3}.$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$ donc par passage à la limite, $\ell \geqslant 0$. Conclusion,

$$\boxed{\text{les suites } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ convergent vers } \sqrt{3}.}$$

Partie 2 : Par une étude de fonction

On considère la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x^2+3}{2x}. \end{array}$$

On pose également $g : x \mapsto f(x) - x$.

8. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{3}{2x}$. Donc

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - \frac{x}{2} = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \frac{x}{2} + \frac{3}{2x} > \frac{x}{2}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{la courbe de } f \text{ admet une asymptote en } +\infty \text{ d'équation } y = \frac{x}{2}}$$

et

$$\boxed{\text{la courbe de } f \text{ est au-dessus de son asymptote sur } \mathbb{R}_+^* \text{ tout entier.}}$$

9. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f'(x) = \frac{1}{2}\frac{2x\,(x) - \left(x^2+3\right)}{x^2} = \frac{x^2-3}{2x^2}.$$

De plus, $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{3}{2x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ puis $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x^2}{2x} = \frac{x}{2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $f\left(\sqrt{3}\right) = \frac{3+3}{2\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$. Conclusion, on obtient que

x	0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
f'	$\|\|$	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

10. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$g(x) = f(x) - x = \frac{x^2+3}{2x} - x = \frac{x^2+3-2x^2}{2x} = \frac{3-x^2}{2x}.$$

Conclusion, on obtient le tableau de signe suivant :

x	0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$g(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	

11. Pour tout $x \in \left[\sqrt{3};+\infty\right[$, on a

$$0 \leqslant f'(x) = \frac{x^2-3}{2x^2} \leqslant \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}.$$

Soit $(x,y) \in \left[\sqrt{3};+\infty\right[^2$, $x \neq y$. Alors, f est continue sur $[x;y]$ (ou $[y;x]$) et dérivable sur $]x;y[$ (ou $]y;x[$). Donc par le théorème des accroissements finis, on a

$$|f(x)-f(y)| \leqslant \sup_{t\in]x;y[} \left|f'(t)\right| |x-y| \leqslant \sup_{t\in\left[\sqrt{3};+\infty\right[} \left|f'(t)\right| |x-y| \leqslant \frac{1}{2}|x-y|.$$

Ce qui reste encore vrai si $x=y$. Conclusion,

$$\boxed{f \text{ est } \frac{1}{2}\text{-lipschitzienne sur } \left[\sqrt{3};+\infty\right[.}$$

12. On observe que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2} = \frac{u_n+\frac{3}{u_n}}{2} = \frac{u_n^2+3}{2u_n}.$$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$: « $u_n \geqslant \sqrt{3}$. » On procède par récurrence.

Initialisation. Si $n=0$, alors $u_0 = 2 > \sqrt{3}$. Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ et montrons $\mathscr{P}(n+1)$. Par hypothèse de récurrence, $u_n \in \left[\sqrt{3};+\infty\right[$. On observe que

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} = \frac{u_n + \frac{3}{u_n}}{2} = \frac{u_n^2+3}{2u_n}.$$

Puisque $u_n \geqslant \sqrt{3} > 0$, on en déduit que $u_{n+1} = f(u_n)$. Donc par la question 9.

$$u_{n+1} \geqslant \sqrt{3}.$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie et donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \geqslant \sqrt{3}.}$$

13. On a vu à travers la question précédente que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[\sqrt{3};+\infty\right[$ et f est croissante sur $\left[\sqrt{3};+\infty\right[$. Enfin, on a $u_1 = \frac{7}{4} < u_0$. Montrons par récurrence que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$: « $u_{n+1} < u_n$ ».

    Initialisation. Si $n = 0$, alors $u_1 = \frac{7}{4} < 2 = u_0$, donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

    Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie i.e. $u_{n+1} < u_n$. Puisque $u_{n+1} \in \left[\sqrt{3};+\infty\right[$, $u_n \in \left[\sqrt{3};+\infty\right[$ et que f est strictement croissante sur $\left[\sqrt{3};+\infty\right[$ (sa dérivée est strictement positive sur $\left]\sqrt{3};+\infty\right[$), on en déduit que

$$f(u_{n+1}) < f(u_n) \qquad \Leftrightarrow \qquad u_{n+2} < u_{n+1}.$$

    Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

    Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} < u_n$:

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est strictement décroissante.}}$$

14. Par ce qui précède, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par $\sqrt{3}$. Donc par le théorème de convergence monotone, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On note ℓ sa limite. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant \sqrt{3}$. Donc par passage à la limite, $\ell \geqslant \sqrt{3}$. Or f est continue sur $\left[\sqrt{3};+\infty\right[$. Donc $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(\ell)$. D'autre part, $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ en tant que suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Enfin,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = f(u_n).$$

    Donc par passage à la limite,

$$\ell = f(\ell) \qquad \Leftrightarrow \qquad g(\ell) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{3-\ell^2}{2\ell} = 0 \qquad\qquad \text{par la question 10.}$$

    Donc $\ell^2 = 3$ i.e. $\ell = \sqrt{3}$ car $\ell \geqslant \sqrt{3} > 0$. Conclusion, on retrouve la conclusion de la partie précédente,

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge vers } \sqrt{3}.}$$

15. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par la question 11., en prenant $x = u_n$ et $y = \sqrt{3}$, on a

$$\left|f(u_n) - f\left(\sqrt{3}\right)\right| \leqslant \frac{1}{2}\left|u_n - \sqrt{3}\right|.$$

Or $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f\left(\sqrt{3}\right) = \sqrt{3}$. Donc

$$\left|u_{n+1} - \sqrt{3}\right| \leqslant \frac{1}{2}\left|u_n - \sqrt{3}\right|.$$

De plus, on a vu que $u_n \geqslant \sqrt{3}$ et $u_{n+1} \geqslant \sqrt{3}$. Donc

$$u_{n+1} - \sqrt{3} \leqslant \frac{u_n - \sqrt{3}}{2}.$$

Donc la suite $\left(u_n - \sqrt{3}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est « sous-géométrique de raison 1/2 ». Donc par récurrence, on obtient que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n - \sqrt{3} \leqslant \frac{u_0 - \sqrt{3}}{2^n}.}$$

Partie 3 : Petit détour découverte du côté des séries (pensez à prendre votre appareil photo)

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(u_k - \sqrt{3}\right)$.

16. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par la question précédente, on a pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, $0 \leqslant u_k - \sqrt{3} \leqslant \frac{u_0-\sqrt{3}}{2^k}$. Donc en sommant entre 1 et n :

$$0 \leqslant S_n \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{u_0 - \sqrt{3}}{2^k} = \left(2 - \sqrt{3}\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}.$$

On reconnaît une somme géométrique de raison 1/2. Donc

$$0 \leqslant S_n \leqslant \left(2 - \sqrt{3}\right)\frac{1}{2}\frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = \left(2 - \sqrt{3}\right)\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \leqslant 2.$$

Donc la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée par 2. De plus pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_{n+1} - S_n = \sum_{k=1}^{n+1}\left(u_k - \sqrt{3}\right) - \sum_{k=1}^{n}\left(u_k - \sqrt{3}\right) = u_{n+1} - \sqrt{3}.$$

Or par la question 12. $u_{n+1} - \sqrt{3} \geqslant 0$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_{n+1} \geqslant S_n$ i.e. $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante. Ainsi, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée donc par le théorème de convergence monotone,

$$\boxed{\text{la suite } (S_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge.}}$$

On note ℓ sa limite.

17. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $N \geqslant n + 1$. Puisque $N \geqslant n$, par la croissance de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, on en déduit que $S_N - S_n \geqslant 0$. De plus,

$$S_N - S_n = \sum_{k=n+1}^{N}\left(u_k - \sqrt{3}\right) \qquad \text{car } N \geqslant n+1.$$

Donc par la question 15. puis en reconnaissant une somme géométrique,

$$S_N - S_n \leqslant \sum_{k=n+1}^{N}\frac{u_0 - \sqrt{3}}{2^k} = \left(u_0 - \sqrt{3}\right)\frac{1}{2^{n+1}}\frac{1 - \frac{1}{2^{N-n}}}{1 - \frac{1}{2}} = \left(2 - \sqrt{3}\right)\frac{1 - \frac{1}{2^{N-n}}}{2^n} \leqslant \frac{1 - \frac{1}{2^{N-n}}}{2^n}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall N \geqslant n+1, \qquad 0 \leqslant S_N - S_n \leqslant \frac{1 - \frac{1}{2^{N-n}}}{2^n}.}$$

18. Par la question précédente, en passant à la limite quand $N \to +\infty$, puisque $S_N \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $\frac{1}{2^{N-n}} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on en déduit directement que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 0 \leqslant \ell - S_n \leqslant \frac{1}{2^n}.}$$

Exercice III - Polynômes et espaces vectoriels

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose

$$\Delta(P) = X\left(P(X) - P(X-1)\right).$$

1. On a les calculs suivants :

$$\begin{aligned}
\Delta(1) &= X(1-1) = 0_{\mathbb{R}[X]} \\
\Delta(X) &= X(X-(X-1)) = X \\
\Delta\left(X^2\right) &= X\left(X^2-(X-1)^2\right) = X\left(X^2-X^2+2X-1\right) = X(2X-1) = 2X^2-X \\
\Delta\left(\frac{X^2+X}{2}\right) &= X\left(\frac{X^2+X}{2} - \frac{(X-1)^2+X-1}{2}\right) = X\left(\frac{X^2+X-X^2+X}{2}\right) = X^2.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\Delta(1) = 0_{\mathbb{R}[X]}, \qquad \Delta(X) = X, \qquad \Delta\left(X^2\right) = 2X^2 - X, \qquad \Delta\left(\frac{X^2+X}{2}\right) = X^2.}$$

On considère les ensembles suivants :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ker}(\Delta) &= \left\{ P \in \mathbb{R}_n[X] \;\middle|\; \Delta(P) = 0_{\mathbb{R}[X]} \right\}. \\
\mathrm{Im}(\Delta) &= \left\{ Q \in \mathbb{R}[X] \mid \exists P \in \mathbb{R}_n[X],\ \Delta(P) = Q \right\} \\
F_0 &= \left\{ P \in \mathbb{R}[X] \mid P(0) = 0 \right\}.
\end{aligned}$$

Partie 1 : Un peu d'algèbre linéaire

2.
   - Par définition, $F_0 \subseteq \mathbb{R}[X]$.
   - De plus, si $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$, alors naturellement $P(0) = 0$ donc $0_{\mathbb{R}[X]} \in F_0$.
   - Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(P, Q) \in F_0^2$. Alors $P(0) = Q(0) = 0$. Posons $R = \lambda P + \mu Q$. Montrons que $R \in F_0$ i.e. $R(0) = 0$. On a

     $$R(0) = \lambda P(0) + \mu Q(0) = \lambda \times 0_{\mathbb{R}} + \mu \times 0_{\mathbb{R}} = 0_{\mathbb{R}}.$$

     Donc $R \in F_0$.

   Conclusion,

   $$\boxed{F_0 \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}[X].}$$

3.
   - Par définition, $\mathrm{Ker}(\Delta) \subseteq \mathbb{R}_n[X]$.
   - Si $P = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$, alors $\Delta(P) = X(0-0) = 0_{\mathbb{R}[X]}$. Donc $0_{\mathbb{R}_n[X]} \in \mathrm{Ker}(\Delta)$.
   - Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(P, Q) \in \mathrm{Ker}(\Delta)^2$. Posons $R = \lambda P + \mu Q$. Montrons que $R \in \mathrm{Ker}(\Delta)$. On a

     $$\begin{aligned}
     \Delta(R) &= X\left(R(X) - R(X-1)\right) \\
     &= X\left(\lambda P(X) + \mu Q(X) - (\lambda P(X-1) + \mu Q(X-1))\right) \\
     &= \lambda X\left(P(X) - P(X-1)\right) + \mu X\left(Q(X) - Q(X-1)\right).
     \end{aligned}$$

     Or $P \in \mathrm{Ker}(\Delta)$ et $Q \in \mathrm{Ker}(\Delta)$ donc $\Delta(P) = X(P(X) - P(X-1)) = 0_{\mathbb{R}[X]}$ et $\Delta(Q) = X(Q(X) - Q(X-1)) = 0_{\mathbb{R}[X]}$. Ainsi,

     $$\Delta(R) = \lambda \times 0_{\mathbb{R}[X]} + \mu \times 0_{\mathbb{R}[X]} = 0_{\mathbb{R}[X]}.$$

     D'où $R \in \mathrm{Ker}(\Delta)$.

   Conclusion,

   $$\boxed{\mathrm{Ker}(\Delta) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}_n[X].}$$

4. - Par définition, $\text{Im}(\Delta) \subseteq \mathbb{R}[X]$.
   - Si $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$. Alors, on observe que $P = 0_{\mathbb{R}[X]} = \Delta\left(0_{\mathbb{R}[X]}\right)$. Donc P est l'image d'un élément par Δ. Ainsi, $0_{\mathbb{R}[X]} \in \text{Im}(\Delta)$.
   - Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $(P, Q) \in \text{Im}(\Delta)^2$. Posons $R = \lambda P + \mu Q$. Puisque $P \in \text{Im}(\Delta)$, par définition, il existe $P_1 \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P = \Delta(P_1)$. De même, $Q \in \text{Im}(\Delta)$, donc il existe $Q_1 \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $Q = \Delta(Q_1)$. Par suite,

$$\begin{aligned} R = \lambda P + \mu Q &= \lambda \Delta(P_1) + \mu \Delta(Q_1) \\ &= \lambda X\left(P_1(X) - P_1(X-1)\right) + \mu X\left(Q_1(X) - Q_1(X-1)\right) \\ &= X\left(\lambda P_1(X) + \mu Q_1(X) - \left(\lambda P_1(X-1) + \mu Q_1(X-1)\right)\right). \end{aligned}$$

   Posons $R_1 = \lambda P_1 + \mu Q_1$. Alors, on observe que $R_1 \in \mathbb{R}_n[X]$ et que

$$R = X\left(R(X) - R(X-1)\right) = \Delta(R_1).$$

   Donc R est l'image d'un élément par Δ : $R \in \text{Im}(\Delta)$.

   Conclusion,

$$\boxed{\text{Im}(\Delta) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}[X].}$$

5. Montrons que $\text{Im}(\Delta) \subseteq F_0$. Soit $P \in \text{Im}(\Delta)$. Par définition, il existe $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P = \Delta(Q)$. Donc

$$P = \Delta(Q) = X\left(Q(X) - Q(X-1)\right).$$

   Donc

$$P(0) = 0_{\mathbb{R}} \times \left(Q(0) - Q(-1)\right) = 0_{\mathbb{R}}.$$

   Donc $P \in F_0$. Ceci étant vrai pour tout $P \in \text{Im}(\Delta)$. On en conclut que

$$\boxed{\text{Im}(\Delta) \subseteq F_0.}$$

Partie 2 : Détermination du noyau

6. Soit $P \in \text{Ker}(\Delta)$. Alors

$$\begin{aligned} 0_{\mathbb{R}[X]} = \Delta(P) = X\left(P(X) - P(X-1)\right) \quad &\Rightarrow \quad P(X) - P(X-1) = 0 \\ &\Rightarrow \quad P(X) = P(X-1). \end{aligned}$$

   Posons pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(k)$: « $P(k) = P(0)$ ».

   Initialisation. Si $k = 0$. Alors $P(0) = P(0)$ donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

   Hérédité. Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(k)$ vraie et montrons que $\mathscr{P}(k+1)$ l'est également. Par hypothèse de récurrence, on a $P(k) = P(0)$. Or $P(X) = P(X-1)$. Donc en évaluant en $X = k+1$, on obtient que

$$P(k+1) = P(k+1-1) = P(k) = P(0).$$

   Donc $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.

   Conclusion, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(k)$ est vraie.

   D'où,

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \qquad P(k) = P(0).}$$

7. Soit $P \in \operatorname{Ker}(\Delta)$. Posons $Q = P - P(0)$. Alors par la question précédente, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $Q(k) = 0$. Donc Q possède une infinité de racines, donc $Q = 0_{\mathbb{R}[X]}$ i.e. $P = P(0)$. Donc P est un polynôme constant. Réciproquement soit $P \in \mathbb{R}_0[X]$. Alors, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, tel que $P = \lambda$. Ainsi,

$$\Delta(P) = X(\lambda - \lambda) = 0_{\mathbb{R}[X]}.$$

D'où $P \in \operatorname{Ker}(\Delta)$. Conclusion,

$$\boxed{\operatorname{Ker}(\Delta) = \mathbb{R}_0[X] = \operatorname{Vect}(1).}$$

De plus, par le cours, on sait que $\boxed{\mathscr{B}_K = \left(1_{\mathbb{R}[X]}\right) \text{ est une base de } \mathbb{R}_0[X] \text{ et donc de } \operatorname{Ker}(\Delta)}$.

8. Puisque $\operatorname{Ker}(\Delta)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ qui est lui-même un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$, on en déduit que $\operatorname{Ker}(\Delta)$ est lui aussi un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$. Montrons que $\operatorname{Ker}(\Delta) \cap F_0 = \left\{0_{\mathbb{R}[X]}\right\}$.

   Soit $P \in \operatorname{Ker}(\Delta) \cap F_0$. Dès lors, $P \in \operatorname{Ker}(\Delta)$ et donc par la question précédente, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $P = \lambda$. De plus, $P \in F_0$ donc
$$\lambda = P(0) = 0_{\mathbb{R}}.$$
   Donc $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$. D'où, $\operatorname{Ker}(\Delta) \cap F_0 \subseteq \left\{0_{\mathbb{R}[X]}\right\}$. De plus, on a $\left\{0_{\mathbb{R}[X]}\right\} \subseteq \operatorname{Ker}(\Delta) \cap F_0$. Donc

$$\operatorname{Ker}(\Delta) \cap F_0 = \left\{0_{\mathbb{R}[X]}\right\} \qquad \text{i.e.} \qquad \text{les espaces } \operatorname{Ker}(\Delta) \text{ et } F_0 \text{ sont en somme directe.}$$

   Montrons maintenant que $\operatorname{Ker}(\Delta) + F_0 = \mathbb{R}[X]$. Par définition, $\operatorname{Ker}(\Delta) \subseteq \mathbb{R}[X]$ et $F_0 \subseteq \mathbb{R}[X]$ donc $\operatorname{Ker}(\Delta) + F_0 \subseteq \mathbb{R}[X]$. Réciproquement, soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrons que $P \in \operatorname{Ker}(\Delta) + F_0$ i.e. il existe $(Q, R) \in \operatorname{Ker}(\Delta) \times F_0$ tel que $P = Q + R$. Procédons par analyse-synthèse. On suppose qu'il existe $(Q, R) \in \operatorname{Ker}(\Delta) \times F_0$ tel que $P = Q + R$. On a $Q \in \operatorname{Ker}(\Delta)$. Donc par la question précédente, $Q \in \mathbb{R}_0[X]$ i.e. il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $Q = \lambda$. D'autre part, $R \in F_0$ donc $R(0) = 0$. Ainsi,

$$P(0) = \lambda + R(0) = \lambda\,.$$

   Donc $\lambda = P(0)$ puis nécessairement $R = P - \lambda = P - P(0)$. Ce qui démontre l'unicité du couple (Q, R) à P fixé autrement dit l'on vient de redémontrer que les espaces $\operatorname{Ker}(\Delta)$ et F_0 sont en somme directe. Procédons à la synthèse. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Posons $Q = P(0)$ et $R = P - P(0)$. Alors,

   - $Q + R = P(0) + P - P(0) = P$.
   - De plus, $Q = P(0) \in \mathbb{R}_0[X] = \operatorname{Ker}(\Delta)$.
   - Enfin, $R(0) = P(0) - P(0) = 0$. Donc $R \in F_0$.

   Ainsi, $P \in \operatorname{Ker}(\Delta) + F_0$. D'où $P \in \operatorname{Ker}(\Delta) + F_0$ et donc

$$\operatorname{Ker}(\Delta) + F_0 = \mathbb{R}[X].$$

   Or $\operatorname{Ker}(\Delta) \cap F_0 = \left\{0_{\mathbb{R}[X]}\right\}$. Conclusion,

$$\boxed{\text{les espaces } \operatorname{Ker}(\Delta) \text{ et } F_0 \text{ sont supplémentaires dans } \mathbb{R}[X].}$$

Partie 3 : Détermination de l'image

9. Soient $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $d = \deg(P)$. On suppose que $d \geqslant 1$ et on note $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$. On a alors les égalités entre polynômes suivantes :

$$\Delta(P) = X\left(P(X) - P(X-1)\right) = X\left(\sum_{k=0}^{d} a_k X^k - \sum_{k=0}^{d} a_k (X-1)^k\right).$$

Donc par la formule du binôme de Newton,

$$\begin{aligned}\Delta(P) &= X\left(\sum_{k=0}^{d} a_k X^k - \sum_{k=0}^{d} a_k \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^{k-j} X^j\right)\\ &= X\left(\sum_{k=0}^{d} a_k X^k - \sum_{k=0}^{d}\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} a_k (-1)^{k-j} X^j\right).\end{aligned}$$

On obtient alors une somme double triangulaire dont l'interversion des sommes retourne

$$\begin{aligned}\Delta(P) &= X\left(\sum_{k=0}^{d} a_k X^k - \sum_{j=0}^{d}\sum_{k=j}^{d} \binom{k}{j} a_k (-1)^{k-j} X^j\right)\\ &= X\left[\sum_{k=0}^{d} a_k X^k - \sum_{j=0}^{d}\left(\sum_{k=j}^{d} \binom{k}{j} a_k (-1)^{k-j}\right) X^j\right]\\ &= X\left[\sum_{j=0}^{d} a_j X^j - \sum_{j=0}^{d}\left(\sum_{k=j}^{d} \binom{k}{j} a_k (-1)^{k-j}\right) X^j\right] \qquad \text{car l'indice de sommation est muet}\\ &= X\sum_{j=0}^{d}\left[a_j - \sum_{k=j}^{d} \binom{k}{j} a_k (-1)^{k-j}\right] X^j\\ &= \sum_{j=0}^{d}\left[a_j - \sum_{k=j}^{d} \binom{k}{j} a_k (-1)^{k-j}\right] X^{j+1}.\end{aligned}$$

Conclusion, on obtient bien que

$$\boxed{\Delta(P) = \sum_{j=0}^{d}\left[\sum_{k=j}^{d}\left(a_j - a_k\binom{k}{j}(-1)^{k-j}\right)\right] X^{j+1}.}$$

10. Cherchons le terme dominant de $\Delta(P)$. Par la question précédente, on a $\Delta(P) \in \mathbb{R}_{d+1}[X]$. Notons $P = \sum_{k=0}^{d} b_k X^k$. Pour $j = d$, on a

$$\begin{aligned}b_{d+1} &= \left[\sum_{k=d}^{d}\left(a_d - a_k\binom{k}{d}(-1)^{k-d}\right)\right] X^{d+1}\\ &= \left(a_d - a_d\binom{d}{d}(-1)^{d-d}\right) X^{d+1}\\ &= (a_d - a_d) X^{d+1} = 0_{\mathbb{R}[X]}.\end{aligned}$$

Donc $\deg(\Delta(P)) < d+1$. Puis, pour $j = d-1$, possible car $d \geqslant 1$, on a

$$\begin{aligned} b_d &= \left[a_{d-1} - \sum_{k=d-1}^{d} \binom{k}{d-1} a_k (-1)^{k-d+1}\right] X^{d-1+1} \\ &= \left[a_{d-1} - \binom{d-1}{d-1} a_{d-1} (-1)^{d-1-d+1} - \binom{d}{d-1} a_d (-1)^{d-d+1}\right] X^d \\ &= \left[a_{d-1} - a_{d-1} + \binom{d}{d-1} a_d\right] X^d \\ &= d a_d X^d. \end{aligned}$$

Par hypothèse, $d = \deg(P)$. Donc a_d en tant que coefficient dominant est non nul. De plus $d \geqslant 1$, donc $da_d \neq 0$. Conclusion,

$$\boxed{\deg(\Delta(P)) = d \qquad \text{et} \qquad \text{son terme dominant est } da_dX^d.}$$

11. Soit $Q \in \operatorname{Im}(\Delta)$. Par définition, $Q \in \mathbb{R}[X]$. Montrons que $\deg(Q) \leqslant n$. Puisque $Q \in \operatorname{Im}(\Delta)$, il existe $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $Q = \Delta(P)$. Notons $d = \deg(\Delta(P))$.

    Premier cas, si $d \leqslant 0$ i.e. $P \in \mathbb{R}_0[X]$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $P = \lambda$ puis $Q = \Delta(P) = X(\lambda - \lambda) = 0_{\mathbb{R}[X]}$ donc dans ce cas $Q \in \mathbb{R}_n[X]$.

    Second cas, si $d \geqslant 1$. Alors par la question précédente, $\deg(Q) = \deg(\Delta(P)) = d = \deg(P)$. Or $P \in \mathbb{R}_n[X]$, donc $d \leqslant n$. D'où $\deg(Q) \leqslant n$ i.e. $Q \in \mathbb{R}_n[X]$.

    Ainsi dans tous les cas, $Q \in \mathbb{R}_n[X]$. Ceci tant vrai pour tout $Q \in \operatorname{Im}(\Delta)$, on conclut que

    $$\boxed{\operatorname{Im}(\Delta) \subseteq \mathbb{R}_n[X].}$$

Pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, on pose

$$P_k = -\prod_{i=0}^{k-1} (i - X).$$

12. Pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, posons $\mathscr{P}(k)$: « $\operatorname{Vect}\left(X, X^2, \ldots, X^k\right) \subseteq \operatorname{Vect}(P_1, P_2, \ldots, P_k)$ ». On nous ordonne de procéder par récurrence, obéissons.

    Initialisation. Si $k = 1$, alors

    $$P_1 = -\prod_{i=0}^{0} (i - X) = -(-X) = X.$$

    Donc

    $$\operatorname{Vect}(X) = \operatorname{Vect}(P_1)$$

    et $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

    Hérédité. Soit $k \in [\![1;n-1]\!]$ (attention pour parler de $\mathscr{P}(k+1)$, il faut que $k+1 \leqslant n$ i.e. $k \leqslant n-1$). Supposons que $\mathscr{P}(k)$ est vraie et montrons que alors $\mathscr{P}(k+1)$ l'est aussi. Par hypothèse de récurrence, on a

    $$\operatorname{Vect}\left(X, X^2, \ldots, X^k\right) \subseteq \operatorname{Vect}(P_1, P_2, \ldots, P_k)$$

    Donc

    $$\operatorname{Vect}\left(X, X^2, \ldots, X^k\right) \subseteq \operatorname{Vect}(P_1, P_2, \ldots, P_k, P_{k+1}).$$

    Notamment pour tout $i \in [\![1;k]\!]$, $X^i \in \operatorname{Vect}(P_1, P_2, \ldots, P_k, P_{k+1})$. Montrons que

    $$X^{k+1} \in \operatorname{Vect}(P_1, P_2, \ldots, P_k, P_{k+1}).$$

Par le théorème de la division euclidienne, il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{R}[X]^2$ tel que $X^{k+1} = QP_{k+1} + R$ et $\deg(R) < \deg(P_{k+1})$. Or

$$\deg(P_{k+1}) = \deg\left(-\prod_{i=0}^{k}(i - X)\right) = k+1.$$

Donc $\deg(R) < k+1$ i.e. $\deg(R) \leqslant k$ ou encore $R \in \mathbb{R}_k[X] = \mathrm{Vect}\left(X, X^2, \ldots, X^k\right)$. Or par hypothèse de récurrence, $\mathrm{Vect}\left(X, X^2, \ldots, X^k\right) \subseteq \mathrm{Vect}(P_1, P_2, \ldots, P_k, P_{k+1})$ donc

$$R \in \mathrm{Vect}(P_1, P_2, \ldots, P_k, P_{k+1}).$$

Autrement dit,

$$\exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_{k+1}) \in \mathbb{R}^{k+1}, \qquad R = \sum_{j=1}^{k+1} \lambda_j P_j.$$

De plus, $\deg(R) < k+1 = \deg\left(X^{k+1}\right)$. Donc

$$\deg(QP_{k+1}) = \deg\left(X^{k+1} - R\right) = \deg\left(X^{k+1}\right) = k+1.$$

Ainsi,

$$\deg(Q) + \deg(P_{k+1}) = k+1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \deg(Q) + k + 1 = k+1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \deg(Q) = 0.$$

Donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, tel que $Q = \lambda$. Ainsi,

$$X^{k+1} = \lambda P_{k+1} + \sum_{j=1}^{k+1} \lambda_j P_j = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j P_j + (\lambda + \lambda_{k+1}) P_{k+1} \in \mathrm{Vect}(P_1, P_2, \ldots, P_k, P_{k+1}).$$

Or nous avions vu que pour tout $i \in [\![1;k]\!]$, $X^i \in \mathrm{Vect}(P_1, P_2, \ldots, P_k, P_{k+1})$. On en déduit donc que $\mathrm{Vect}(P_1, P_2, \ldots, P_k, P_{k+1})$ est un espace vectoriel contenant tous les X^i pour $i \in [\![1;k+1]\!]$. Or $\mathrm{Vect}\left(X, X^2, \ldots, X^k, X^{k+1}\right)$ est le plus petit espace vectoriel, au sens de l'inclusion, vérifiant cette propriété. Donc

$$\mathrm{Vect}\left(X, X^2, \ldots, X^k, X^{k+1}\right) \subseteq \mathrm{Vect}(P_1, P_2, \ldots, P_k, P_{k+1}).$$

Donc $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.

Conclusion, pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, $\mathscr{P}(k)$ est vraie :

$$\boxed{\forall k \in [\![1;n]\!], \qquad \mathrm{Vect}\left(X, X^2, \ldots, X^k\right) \subseteq \mathrm{Vect}(P_1, P_2, \ldots, P_k).}$$

13. Soit $k \in [\![1;n]\!]$. On a

$$\begin{aligned}
\Delta(P_k) &= X\left(P_k(X) - P_k(X-1)\right) \\
&= X\left(-\prod_{i=0}^{k-1}(i - X) + \prod_{i=0}^{k-1}(i - X + 1)\right) \\
&= X\left(-\prod_{i=0}^{k-1}(i - X) + \prod_{j=1}^{k}(j - X)\right) \\
&= X\prod_{i=1}^{k-1}(i - X)\left(-(-X) + (k - X)\right) \\
&= -\left[\prod_{i=0}^{k-1}(i - X)\right](k) \\
&= -kP_k.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall k \in [\![1;n]\!], \qquad \Delta(P_k) = -kP_k.}$$

14. Pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, posons $Q_k = -\frac{P_k}{k}$. Soit $k \in [\![1;n]\!]$. Alors,

$$\Delta\left(Q_k\right) = X\left(Q_k(X) - Q_k(X-1)\right) = X\left(-\frac{P_k(X)}{k} + \frac{P_k(X-1)}{k}\right) = -\frac{\Delta\left(P_k\right)}{k}.$$

Donc par la question précédente,

$$\Delta\left(Q_k\right) = \frac{kP_k}{k} = P_k.$$

Donc Q_k est un antécédent de P_k par Δ, notamment P_k admet un antécédent et donc

$$\forall k \in [\![1;n]\!], \qquad P_k \in \operatorname{Im}\left(\Delta\right).$$

Or nous avons vu que $\operatorname{Im}\left(\Delta\right)$ est un espace vectoriel donc

$$\operatorname{Vect}\left(P_1, P_2, \dots, P_n\right) \subseteq \operatorname{Im}\left(\Delta\right).$$

Réciproquement, nous avons déjà établi que $\operatorname{Im}\left(\Delta\right) \subseteq \mathbb{R}_n[X]$. Donc

$$\operatorname{Im}\left(\Delta\right) \subseteq \mathbb{R}_n[X].$$

Soit $P \in \operatorname{Im}\left(\Delta\right)$, donc $P \in \mathbb{R}_n[X]$: il existe $(b_0, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que

$$P = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k.$$

De plus, on a vu que $\operatorname{Im}\left(\Delta\right) \subseteq F_0$. Donc $P(0) = 0$ i.e. $b_0 = 0$. Ainsi,

$$P = \sum_{k=1}^{n} b_k X^k \in \operatorname{Vect}\left(X, \dots, X^n\right).$$

Ceci étant vrai pour tout $P \in \operatorname{Im}\left(\Delta\right)$, on en déduit que

$$\operatorname{Im}\left(\Delta\right) \subseteq \operatorname{Vect}\left(X, \dots, X^n\right).$$

Donc par la question 12. on en déduit que

$$\operatorname{Im}\left(\Delta\right) \subseteq \operatorname{Vect}\left(P_1, \dots, P_n\right).$$

D'où

$$\operatorname{Im}\left(\Delta\right) = \operatorname{Vect}\left(P_1, \dots, P_n\right).$$

Donc $(P_1, \dots, P_n)$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im}\left(\Delta\right)$. Montrons enfin que $(P_1, \dots, P_n)$ est libre. Pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, $\deg\left(P_k\right) = k$. Donc $(P_1, \dots, P_n)$ est une famille de polynômes échelonnées en leurs degrés. Donc $(P_1, \dots, P_n)$ est libre. Conclusion,

$$\boxed{(P_k)_{k \in [\![1;n]\!]} \text{ est une base de } \operatorname{Im}\left(\Delta\right).}$$

Partie 4 : Parce que Gauss avec sa somme des entiers est un petit joueur

On suppose $n \geqslant 2$ et on fixe $p \in [\![2;n]\!]$.

15. *Existence.* Puisque $p \in [\![2;n]\!]$, on a $X^p \in \operatorname{Vect}\left(X, \dots, X^n\right)$. Donc par la question 12.

$$X^p \in \operatorname{Vect}\left(P_1, \dots, P_n\right) = \operatorname{Im}\left(\Delta\right), \qquad \text{par la question précédente.}$$

Donc $X^p \in \operatorname{Im}\left(\Delta\right)$ et il existe $T_p \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\Delta\left(T_p\right) = X^p$.

Rédaction 1. Par la question 8. $\mathbb{R}_n[X] = \operatorname{Ker}(\Delta) + F_0$ donc il existe $(R_p, S_p) \in \operatorname{Ker}(\Delta) \times F_0$ tel que $T_p = R_p + S_p$. Dès lors,

$$\begin{aligned}\Delta(S_p) &= \Delta(T_p - R_p)\\ &= X(T_p(X) - R_p(X) - (T_p(X-1) - R_p(X-1)))\\ &= X(T_p(X) - T_p(X-1)) - X(R_p(X) - R_p(X-1))\\ &= \Delta(T_p) + \Delta(R_p)\\ &= X^p + \Delta(R_p).\end{aligned}$$

Or $R_p \in \operatorname{Ker}(\Delta)$ donc $\Delta(R_p) = 0$. Ainsi,

$$\Delta(S_p) = X^p.$$

Enfin, $S_p \in F_0$, donc $S_p(0) = 0$. Conclusion, on a bien l'existence d'un polynôme $S_p \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\Delta(S_p) = X^p$ et $S_p(0) = 0$.

Rédaction 2. Posons $S_p = T_p - T_p(0)$. Alors, $S_p \in \mathbb{R}_n[X]$, $S_p(0) = T_p(0) - T_p(0) = 0$ et

$$\begin{aligned}\Delta(S_p) &= X(S_p(X) - S_p(X-1))\\ &= X(T_p(X) - T_p(0) - (T_p(X-1) - T_p(0)))\\ &= X(T_p(X) - T_p(X-1))\\ &= \Delta(T_p) = X^p.\end{aligned}$$

Conclusion, on a bien l'existence d'un polynôme $S_p \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\Delta(S_p) = X^p$ et $S_p(0) = 0$.

Unicité. Soient $(U_p, V_p) \in \mathbb{R}_n[X]^2$ tel que $\Delta(U_p) = \Delta(V_p) = X^p$ et $U_p(0) = V_p(0) = 0$. On a alors,

$$\begin{aligned}\Delta(U_p - V_p) &= X(U_p(X) - V_p(X) - (U_p(X-1) - V_p(X-1)))\\ &= X(U_p(X) - U_p(X-1)) - X(V_p(X) - V_p(X-1))\\ &= \Delta(U_p) - \Delta(V_p) = X^p - X^p = 0_{\mathbb{R}[X]}.\end{aligned}$$

Donc $U_p - V_p \in \operatorname{Ker}(\Delta)$. Donc par la question 7. $U_p - V_p \in \mathbb{R}_0[X]$ i.e. il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $U_p - V_p = \lambda$. En particulier,

$$\lambda = U_p(0) - V_p(0) = 0_{\mathbb{R}}.$$

Donc $U_p - V_p = 0_{\mathbb{R}[X]}$ i.e. $U_p = V_p$ ce qui démontre l'unicité.

Conclusion,

$$\boxed{\exists! S_p \in \mathbb{R}_n[X], \qquad \Delta(S_p) = X^p \qquad \text{et} \qquad S_p(0) = 0.}$$

16. On observe que $X^2 + X = X(X+1)$. Donc pour montrer que $X(X+1)$ divise S_p, il faut et il suffit de démontrer que 0 et -1 sont des racines de S_p. Par construction, $S_p(0) = 0$ donc 0 est une racine de S_p. De plus, on sait que

$$\Delta(S_p) = X(S_p(X) - S_p(X-1)) = X^p \qquad \Leftrightarrow \qquad S_p(X) - S_p(X-1) = X^{p-1} \qquad \text{car } p \geqslant 2.$$

Donc en évaluant en 0, on a

$$S_p(1) - S_p(0) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad S_p(1) = 0.$$

Donc 0 et 1 sont deux racines distinctes de S_p. Conclusion,

$$\boxed{X(X+1) = X^2 + X \text{ divise } S_p.}$$

17. On a vu à la question précédente que $S_p(X)-S_p(X-1)=X^{p-1}$. On obtient de même que $S_{p+1}(X)-S_{p+1}(X-1)=X^p$. Donc en évaluant en k,

$$\forall k\in\mathbb{N}^*,\qquad S_{p+1}(k)-S_{p+1}(k-1)=k^p.$$

Ainsi en sommant, entre 1 et N, pour tout $N\in\mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^N k^p=\sum_{k=1}^N\left(S_{p+1}(k)-S_{p+1}(k-1)\right).$$

On reconnaît une somme télescopique :

$$\sum_{k=1}^N k^p=S_{p+1}(N)-S_{p+1}(0).$$

Or par construction, $S_{p+1}(0)=0$. Conclusion,

$$\boxed{\forall N\in\mathbb{N}^*,\qquad \sum_{k=1}^N k^p=S_{p+1}(N).}$$

Au contraire de ce que dirait Souchon, c'est pas bidon. Alors admiration.

18. (a) On cherche S_5 sous la forme d'un polynôme de degré 5. Soit $P=\sum_{k=0}^5 a_kX^5$. On a $P(0)=a_0$. Fixons donc $a_0=0$. De plus, on a les calculs suivants :

$$\begin{aligned}
P(X-1) &= a_1(X-1)+a_2(X-1)^2+a_3(X-1)^3+a_4(X-1)^4+a_5(X-1)^5\\
&= \begin{array}{llllll}
-a_1 & +a_1X & & & & \\
+a_2 & -2a_2X & +a_2X^2 & & & \\
-a_3 & +3a_3X & -3a_3X^2 & +a_3X^3 & & \\
+a_4 & -4a_4X & +6a_4X^2 & -4a_4X^3 & +a_4X^4 & \\
-a_5 & +5a_5X & -10a_5X^2 & +10a_5X^3 & -5a_5X^4 & +a_5X^5
\end{array}\\
&= \begin{array}{l}
-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5\\
+(a_1-2a_2+3a_3-4a_4+5a_5)X\\
+(a_2-3a_3+6a_4-10a_5)X^2\\
+(a_3-4a_4+10a_5)X^3\\
+(a_4-5a_5)X^4\\
+a_5X^5
\end{array}
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\Delta(P) =& X(P(X)-P(X-1))\\
=&(a_1-a_2+a_3-a_4+a_5)X\\
&+(2a_2-3a_3+4a_4-5a_5)X^2\\
&+(3a_3-6a_4+10a_5)X^3\\
&+(4a_4-10a_5)X^4\\
&+5a_5X^5.
\end{aligned}$$

On obtient alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
P = S_5 \quad & \Leftrightarrow \quad \Delta(P) = X^5 \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 = 0 \\ 2a_2 - 3a_3 + 4a_4 - 5a_5 = 0 \\ 3a_3 - 6a_4 + 10a_5 = 0 \\ 4a_4 - 10a_5 = 0 \\ 5a_5 = 1 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_1 = a_2 - a_3 + a_4 - a_5 = 0 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{-10+15-6}{30} = -\frac{1}{30} \\ a_2 = \frac{3a_3 - 4a_4 + 5a_5}{2} = \frac{1-2+1}{2} = 0 \\ a_3 = \frac{6a_4 - 10a_5}{3} = \frac{3-2}{3} = \frac{1}{3} \\ a_4 = \frac{10}{4}a_5 = \frac{5}{2}\frac{1}{5} = \frac{1}{2} \\ a_5 = \frac{1}{5} \end{cases}
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{S_5 = \frac{6X^5 + 15X^4 + 10X^3 - X}{30}.}$$

(b) Bien sûr on commence par noter que $S_5 = \frac{X}{30}\left(6X^4 + 15X^3 + 10X^2 - 1\right)$. De plus, on a vu à la question 16. que $X+1$ divise aussi S_5. Donc -1 est une racine. Donc par la méthode de Horner :

	6	15	10	0	-1
-1	6	9	1	-1	0

D'où

$$6X^4 + 15X^3 + 10X^2 - 1 = (X+1)\left(6X^3 + 9X^2 + X - 1\right).$$

On note que $-1/2$ est une racine de $6X^3 + 9X^2 + X - 1$ car

$$-\frac{6}{8} + \frac{9}{4} - \frac{1}{2} - 1 = \frac{-3+9-2-4}{4} = 0.$$

Par la méthode de Horner :

	6	9	1	-1
$-\frac{1}{2}$	6	6	-2	0

Donc

$$6X^3 + 9X^2 + X - 1 = \left(X + \frac{1}{2}\right)\left(6X^2 + 6X - 2\right) = (2X+1)\left(3X^2 + 3X - 1\right).$$

Soit Δ le discriminant de $3X^2 + 3X - 1$. On a $\Delta = 9 + 12 = 21$. Donc les racines associées sont $\frac{-3+\sqrt{21}}{6}$ et $\frac{-3-\sqrt{21}}{6}$. D'où

$$3X^2 + 3X - 1 = 3\left(X + \frac{3-\sqrt{21}}{6}\right)\left(X + \frac{3+\sqrt{21}}{6}\right).$$

Finalement, on obtient que

$$\boxed{S_5 = \frac{1}{10}X(X+1)(2X+1)\left(X + \frac{3-\sqrt{21}}{6}\right)\left(X + \frac{3+\sqrt{21}}{6}\right).}$$

(c) Par la question précédente, on a

$$S_5 = \frac{X\,(X+1)\,(2X+1)\left(3X^2+3X-1\right)}{30}.$$

Donc par la question 17. avec $p = 4$,

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k^4 = S_5(n) = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)\left(3n^2+3n-1\right)}{30}.}$$

Vérifions, pour $n = 1$, on a

$$\frac{n\,(n+1)\,(2n+1)\left(3n^2+3n-1\right)}{30} = \frac{2\times 3\times(3+3-1)}{30} = 1 = 1^4.$$

Pour $n = 2$,

$$\frac{n\,(n+1)\,(2n+1)\left(3n^2+3n-1\right)}{30} = \frac{2\times 3\times 5\times(12+6-1)}{30} = 17.$$

Et $1^4 + 2^4 = 1 + 16 = 17$. OK !