Devoir Maison 8
Espaces vectoriels, séries numériques, applications linéaires

A faire pour le vendredi 1 avril

Exercice I - Espaces vectoriels

Le but de ce problème est d'établir un supplémentaire commun à deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension 4.

Partie 1 : Un exemple dans $\mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $e_k : x \mapsto \mathrm{e}^{kx}$. On considère $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ ainsi que les ensembles suivantes :

$$E = \mathrm{Vect}(\mathscr{B}) \qquad F = \left\{ f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f'' - 3f' + 2f = 0 \right\}$$
$$H = \mathrm{Vect}(e_2 + e_3, e_4) \qquad G = \left\{ g \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid g'' - 4g' + 3g = 0 \right\}.$$

1. Déterminer la dimension de E.
2. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
   On admet de même que G est un espace vectoriel.
3. Sans déterminer F ni G, déterminer $F \cap G$. F et G sont-ils en somme directe ?
4. Déterminer une base et la dimension de F.
5. Déterminer une base et la dimension de G.
6. Déterminer $F + G$ et préciser sa dimension. Est-ce cohérent avec la question 3. ?
7. Montrer que H est un supplémentaire de F et un supplémentaire de G dans E.
8. Déterminer l'unique fonction $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ solution du problème de Cauchy :

$$(\mathscr{P}) \; : \; \begin{cases} f \in F \\ f(0) = \frac{1}{2}, \; f'(0) = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

9. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(e_k)_{k \in [\![0;n]\!]}$ est libre.
   On pourra supposer $\lambda_n \neq 0$ et regarder l'équivalent en $+\infty$.

Partie 2 : Cas général

Soient E un espace vectoriel de dimension 4 et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que F et G admettent un supplémentaire commun si et seulement si

$$(\bigstar) \qquad \exists H \; \begin{cases} F \oplus H = E \\ G \oplus H = E. \end{cases}$$

On souhaite démontrer que si F et G ont la même dimension alors, il existe un sous-espace vectoriel H qui soit supplémentaire à F et à G dans E. Autrement dit

$$\dim(F) = \dim(G) \quad \Rightarrow \quad \exists H \; \begin{cases} F \oplus H = E \\ G \oplus H = E. \end{cases}$$

10. Montrer que la réciproque est vraie : si H est un supplémentaire à F et à G alors $\dim(F) = \dim(G)$.

11. Montrer que si $F = G$ alors $(\bigstar)$ est vraie. *Attention, même si la question n'est pas difficile, il faudra citer un théorème du cours...*

12. Monter que si $\dim(F) = \dim(G) = 0$ ou si $\dim(F) = \dim(G) = 4$ alors $(\bigstar)$ est vraie.

On suppose dans toute la suite que $\dim(F) = \dim(G)$ et que $F \neq G$.

13. Montrer que F n'est pas inclus dans G et en déduire qu'il existe $f \in F \setminus G$. On admet de même (par symétrie des hypothèses) qu'il existe $g \in G \setminus F$. On pose $a = f + g$.

14. Montrer que F et $\mathrm{Vect}(a)$ sont en somme directe et que G et $\mathrm{Vect}(a)$ sont en somme directe.

15. On suppose dans cette question que $\dim(F) = \dim(G) = 3$. Démontrer que $H = \mathrm{Vect}(a)$ est solution de $(\bigstar)$

16. On suppose dans cette question que $\dim(F) = \dim(G) = 2$. On pose $F' = F \oplus \mathrm{Vect}(a)$ et $G' = G \oplus \mathrm{Vect}(a)$.

    (a) Déterminer $\dim(F')$, $\dim(G')$.
    (b) En déduire qu'il existe H' un sous-espace vectoriel de E tel que $F' \oplus H' = G' \oplus H' = E$.
    (c) Montrer que H' et $\mathrm{Vect}(a)$ sont en somme directe.
    (d) On pose $H = H' \oplus \mathrm{Vect}(a)$. Montrer que H est solution de $(\bigstar)$

17. On suppose que $\dim(F) = \dim(G) = 1$.

    (a) Justifier que $F = \mathrm{Vect}(f)$ et $G = \mathrm{Vect}(g)$.
    (b) On pose $P = F + G$ et H_0 un supplémentaire de P dans E. Enfin, on définit $H = H_0 + \mathrm{Vect}(a)$. Montrer que H est solution de $(\bigstar)$.

Partie 3 : Une application linéaire

On considère l'application f définit pour tout $P \in \mathbb{R}_3[X]$ par $f(P) = X^2P'' - 3XP' + 3P$.

18. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}_3[X]$, $\deg(f(P)) \leqslant 3$.

19. Montrer que f est un endomorphisme $\mathbb{R}_3[X]$.

20. Déterminer une base du noyau et préciser sa dimension.

21. Déterminer une base de son image et préciser sa dimension.

22. Les espaces $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(g)$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$?

23. A l'aide de la question 16. déterminer un supplémentaire commun à $F = \mathrm{Ker}(f)$ et $G = \mathrm{Im}(f)$.

Exercice II - Séries numériques

Soient $a \in \mathbb{R}_+$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On souhaite déterminer les valeurs de a et α pour lesquelles la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge avec

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = \frac{n^\alpha}{(1+a)(1+a^2)(1+a^3)\cdots(1+a^n)}.$$

Partie 1 : Cas $a = 0$

On suppose dans cette partie que $a = 0$.

1. Déterminer les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ pour lesquelles $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} n^\alpha$ converge.
2. Lorsque $\alpha = -3$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $N \geqslant n+1$,
$$\frac{1}{2\,(n+1)^2} - \frac{1}{2\,(N+1)^2} \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} u_k \leqslant \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{2N^2}.$$
3. En déduire un équivalent simple quand $n \to +\infty$ du reste d'ordre n de $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

Partie 2 : Cas $a = 1$

On suppose que $a = 1$.

4. Déterminer la limite de $n^2 u_n$ quand $n \to +\infty$.
5. En déduire que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge.
6. Pour tout $x \in \left]-1;1\right[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k.$$
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier que f_n est dérivable sur $\left]-1;1\right[$ et montrer que
$$\forall x \in \left]-1;1\right[, \qquad x f_n'(x) = \sum_{k=0}^{n} k x^k.$$
   (b) En calculant la dérivée de f_n d'une autre façon, en déduire que
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}.$$
   (c) Lorsque $\alpha = 1$, en déduire la somme totale de $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$.

Partie 3 : Cas $a > 1$

On suppose que $a > 1$.

7. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(1+a)\left(1+a^2\right)\cdots(1+a^n) \geqslant 2^n$.
8. En déduire la nature de $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$.

Partie 4 : Cas $0 < a < 1$

On suppose que $0 < a < 1$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \ln(u_n)$.

9. Montrer que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \ln(1+a^n)$ converge. On note ℓ sa somme totale.
10. Suivant les valeurs de α, en déduire la limite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ puis celle de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
11. Si $\alpha \geqslant 0$, que peut-on en déduire ?
12. Soit $\alpha < 0$. Déterminer un équivalent simple de u_n quand $n \to +\infty$ en fonction de ℓ.
13. En déduire la nature de $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$.
14. Conclusion, représenter dans le plan l'ensemble
$$\mathscr{S} = \left\{ (a,\alpha) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \;\middle|\; (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge } \right\}.$$