Correction du Devoir Maison 8
Espaces vectoriels, séries numériques, applications linéaires

Du vendredi 01 avril

Exercice I - Espaces vectoriels

Le but de ce problème est d'établir un supplémentaire commun à deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension 4.

Partie 1 : Un exemple dans $\mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $e_k : x \mapsto \mathrm{e}^{kx}$. On considère les ensembles suivantes :

$$E = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3, e_4) \qquad F = \left\{ f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f'' - 3f' + 2f = 0 \right\}$$
$$H = \mathrm{Vect}(e_2 + e_3, e_4) \qquad G = \left\{ g \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid g'' - 4g' + 3g = 0 \right\}.$$

1. Montrons que $\mathscr{B}$ est libre. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + \lambda_4 e_4 = 0_{\mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})}.$$

Alors,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \lambda_1 \mathrm{e}^{x} + \lambda_2 \mathrm{e}^{2x} + \lambda_3 \mathrm{e}^{3x} + \lambda_4 \mathrm{e}^{4x} = 0_{\mathbb{R}}.$$

Plusieurs méthodes. On aime bien les développements limités, alors ne nous privons pas. On sait que $\mathrm{e}\,x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
0 &\underset{x\to 0}{=} \lambda_1 \mathrm{e}^{x} + \lambda_2 \mathrm{e}^{2x} + \lambda_3 \mathrm{e}^{3x} + \lambda_4 \mathrm{e}^{4x} \\
&\underset{x\to 0}{=} \lambda_1\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)\right) \\
&\quad + \lambda_2\left(1 + 2x + \frac{4}{2}x^2 + \frac{8x^3}{6} + o\left(x^3\right)\right) \\
&\quad + \lambda_3\left(1 + 3x + \frac{9x^2}{2} + \frac{27x^3}{6} + o\left(x^3\right)\right) \\
&\quad + \lambda_4\left(1 + 4x + \frac{16}{2}x^2 + \frac{64x^3}{6} + o\left(x^3\right)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) + (\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 + 4\lambda_4)\, x + (\lambda_1 + 2\lambda_2 + 9\lambda_3 + 16\lambda_4)\frac{x^2}{2} \\
&\qquad + (\lambda_1 + 8\lambda_2 + 27\lambda_3 + 64\lambda_4)\frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)
\end{aligned}$$

Par unicité du développement limité, on obtient que

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 + 4\lambda_4 = 0 \\ \frac{1}{2}(\lambda_1 + 4\lambda_2 + 9\lambda_3 + 16\lambda_4) = 0 \\ \frac{1}{6}(\lambda_1 + 8\lambda_2 + 27\lambda_3 + 64\lambda_4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 + 4\lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 + 4\lambda_2 + 9\lambda_3 + 16\lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 + 8\lambda_2 + 27\lambda_3 + 64\lambda_4 = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} L_3 \leftarrow 2L_3 \\ L_4 \leftarrow 6L_4 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 + 3\lambda_4 = 0 \\ 3\lambda_2 + 8\lambda_3 + 15\lambda_4 = 0 \\ 7\lambda_2 + 26\lambda_3 + 63\lambda_4 = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 + 3\lambda_4 = 0 \\ 2\lambda_3 + 6\lambda_4 = 0 \\ 12\lambda_3 + 42\lambda_4 = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 7L_2. \end{matrix}$$

Par suite :

$$\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4=0\\ \lambda_2+2\,\lambda_3+3\,\lambda_4=0\\ \lambda_3+3\,\lambda_4=0\\ 2\,\lambda_3+7\,\lambda_4=0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} L_3\leftarrow \frac{1}{2}L_3\\ L_4\leftarrow \frac{1}{6}L_4 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4=0\\ \lambda_2+2\,\lambda_3+3\,\lambda_4=0\\ \lambda_3+3\,\lambda_4=0\\ \lambda_4=0 \end{cases} \quad L_4\leftarrow L_4-2L_3$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1=0\\ \lambda_2=0\\ \lambda_3=0\\ \lambda_4=0. \end{cases}$$

Donc $\mathscr{B}$ est libre. Or par définition, $\mathscr{B}$ engendre E. Donc $\mathscr{B}$ est une base de E. Conclusion,

$$\boxed{\dim(E)=\mathrm{Card}(\mathscr{B})=4.}$$

2. On observe les points suivants.
   - $F\subseteq \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ par définition.
   - Soit $f=0_{\mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})}$. Alors $f''-3f'+2f=0-3\times 0+2\times 0=0$. Donc $0\in F$.
   - Soient $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ et $(f,g)\in F^2$. Posons $h=\lambda f+\mu g$. Puisque f et g sont dans F, elles sont deux fois dérivable (car $\mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$). Il en va donc de même pour h. De plus, on a

   $$\begin{aligned} h''-3h'+2h &= \lambda f''+\mu g''-3\left(\lambda f'+\mu g'\right)+2\left(\lambda f+\mu g\right) && \text{par linéarité de la dérivation}\\ &= \lambda\left(f''-3f'+2f\right)+\mu\left(g''-3g'+2g\right)\\ &= 0_{\mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})} && \text{car } f\in F \text{ et } g\in F \end{aligned}$$

   Donc $h\in F$ et F est stable par combinaisons linéaires.

Conclusion,

$$\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}).}$$

On admet de même que G est un espace vectoriel.

3. Soit $f\in F\cap G$. Alors $f\in F$ et $f\in G$ donc

$$\begin{cases} f''-3f'+2f=0\\ f''-4f'+3f=0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad f'-f=0. \qquad L_1\leftarrow L_2-L_1.$$

On observe alors que f est une solution d'une équation homogène du premier ordre. Soit $a : t\mapsto -1$. La fonction a est continue et admet donc des primitives sur $\mathbb{R}$ dont l'une est donnée par $A : x\mapsto -x$. Ainsi,

$$\exists C\in\mathbb{R},\ \forall x\in\mathbb{R},\qquad f(x)=C\,\mathrm{e}^{x}=Ce_1(x).$$

Donc $F\cap G\subseteq \mathrm{Vect}(e_1)$. Réciproquement, soit $f\in\mathrm{Vect}(e_1)$. Alors il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $f=\lambda e_1$. Donc

$$f''-3f'+2f=\lambda\, e_1''-3e_1'+2e_1=e_1-3e_1+2e_1=0.$$

Donc $f\in F$ et de même, $f''-4f'+3f=e_1-4e_1+3e_1=0$. Donc $f\in G$ et donc $f\in F\cap G$. D'où $\mathrm{Vect}(e_1)\subseteq F\cap G$. Conclusion,

$$\boxed{F\cap G=\left\{f\in\mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})\ \middle|\ f'-f=0\right\}=\mathrm{Vect}(e_1).}$$

Puisque $F\cap G\neq\left\{0_{\mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})}\right\}$, on en déduit que

$$\boxed{F \text{ et } G \text{ ne sont pas en somme directe.}}$$

4. Soit $(F) : f'' - 3f' + 2f = 0$. Son équation caractéristique associée est donnée par $r^2 - 3r + 2 = 0$ dont les deux racines sont 1 et 2. Donc on obtient

$$F = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & A\,\mathrm{e}^x + B\,\mathrm{e}^{2x} \end{array} \;\middle|\; (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \mathrm{Vect}\,(e_1, e_2)\,.$$

e_1 et e_2 ne sont pas colinéaires (en tant que sous-famille de $\mathscr{B}$ qui est libre) donc (e_1, e_2) est libre et engendre F. Conclusion,

$$\boxed{(e_1, e_2) \text{ est une base de } F \text{ et } \dim(F) = \mathrm{Card}\,(e_1, e_2) = 2.}$$

5. De même $(G) : f'' - 4f' + 3f = 0$ a pour équation caractéristique $r^2 - 4r + 3 = 0$ dont les racines sont 1 et 3. Donc $G = \mathrm{Vect}\,(e_1, e_3)$. Or (e_1, e_3) est libre et engendre G donc est une base de G. Ainsi,

$$\boxed{(e_1, e_3) \text{ est une base de } G \text{ et } \dim(G) = \mathrm{Card}\,(e_1, e_3) = 2.}$$

6. Par les questions précédentes, on a directement,

$$F + G = \mathrm{Vect}\,(e_1, e_2) + \mathrm{Vect}\,(e_1, e_3) = \mathrm{Vect}\,(e_1, e_2, e_1, e_3) = \mathrm{Vect}\,(e_1, e_2, e_3)\,.$$

(e_1, e_2, e_3) est libre en tant que sous-famille de $\mathscr{B}$ qui est libre. De plus elle engendre $F+G$ donc c'est une base de $F+G$. Conclusion,

$$\boxed{F + G = \mathrm{Vect}\,(e_1, e_2, e_3) \qquad \text{et} \qquad \dim(F+G) = \mathrm{Card}\,(e_1, e_2, e_3) = 3.}$$

Par la formule de Grassmann, et les questions précédentes, on sait que

$$\dim(F \cap G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F+G) = 2 + 2 - 3 = 1.$$

$\boxed{\text{Ce qui est bien cohérent avec la question 3.}}$ Naturellement, puisque les espaces F et G vérifient $\dim(F) + \dim(G) = 2 + 2 = 4 = \dim(E)$, si leur somme vérifiaient $F + G = E$, alors ils seraient supplémentaires et donc en somme directe. Par contraposée, puisqu'ils ne sont pas en somme directe, nécessairement du fait de leurs dimensions, $F + G \neq E$.

7. On note que $e_1, e_2, e_2 + e_3, e_4$ sont tous des combinaisons linéaires de vecteurs de $\mathscr{B}$ donc de E. Donc, par stabilité de E par combinaisons linéaires, $(e_1, e_2, e_2 + e_3, e_4) \in E^4$ puis,

$$F = \mathrm{Vect}\,(e_1, e_2) \subseteq E \qquad \text{et} \qquad H = \mathrm{Vect}\,(e_2 + e_3, e_4) \subseteq E.$$

F et H sont bien des sous-espaces vectoriels de E (sinon ils ne peuvent pas être supplémentaires dans E).

Notons $\mathscr{B}_H = (e_2 + e_3, e_4)$. Montrons que $\mathscr{B}_H$ est libre. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\lambda\,(e_2 + e_3) + \mu e_4 = 0.$$

Alors, $\lambda\, e_2 + \lambda\, e_3 + \mu e_4 = 0$. Or (e_2, e_3, e_4) est libre en tant que sous-famille de $\mathscr{B}$. Donc $\lambda = \lambda = \mu = 0$. Donc $\lambda = \mu = 0$ et ainsi, $\mathscr{B}_H$ est libre. De plus $\mathscr{B}_H$ engendre H donc c'est une base de H et on note que

$$\dim(H) = \mathrm{Card}\,(\mathscr{B}_H) = 2.$$

Ainsi, on observer que $\dim(F) + \dim(H) = 2 + 2 = \dim(E)$.

Enfin,

$$F + H = \mathrm{Vect}\,(e_1, e_2) + \mathrm{Vect}\,(e_2 + e_3, e_4) = \mathrm{Vect}\,(e_1, e_2, e_2 + e_3, e_4)\,.$$

Or les opérations élémentaires ne modifient pas l'espace engendré. Donc

$$F + H = \mathrm{Vect}\,(e_1, e_2, e_3, e_4) = E \qquad\qquad C_3 \leftarrow C_3 - C_2.$$

Ainsi, $\dim(F)+\dim(H)=\dim(E)$ et $F+H=E$. Conclusion,

$$\boxed{F \text{ et } H \text{ sont supplémentaires dans } E.}$$

De même, e_1, e_3 sont des vecteurs de $\mathscr{B}$ donc G est aussi un sous-espace vectoriel de E. De plus,

$$\dim(G)+\dim(H)=2+2=4=\dim(E)\,.$$

Enfin,

$$\begin{aligned} G+H=\operatorname{Vect}(e_1,e_3)+\operatorname{Vect}(e_2+e_3,e_4) &= \operatorname{Vect}(e_1,e_3,e_2+e_3,e_4) \\ &= \operatorname{Vect}(e_1,e_3,e_2,e_4) && C_3 \leftarrow C_3-C_2 \\ &= \operatorname{Vect}(e_1,e_2,e_3,e_4)\,. && C_3 \leftrightarrow C_2 \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{G \text{ et } H \text{ sont supplémentaires dans } E.}$$

8. Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Par la question 4. on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} (\mathscr{P}) \quad &: \quad \begin{cases} f \in F \\ f(0)=\frac{1}{2},\ f'(0)=-\frac{1}{2} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\ f=\lambda\, e_1+\mu e_2 \\ f(0)=\frac{1}{2},\ f'(0)=-\frac{1}{2} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2 \begin{cases} f=\lambda\, e_1+\mu e_2 \\ \lambda+\mu=\frac{1}{2} \\ \lambda+2\mu=-\frac{1}{2} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2 \begin{cases} f=\lambda\, e_1+\mu e_2 \\ \lambda+\mu=\frac{1}{2} \\ \mu=-1 \end{cases} \qquad L_3 \leftarrow L_3-L_2 \\ &\Leftrightarrow \quad \exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2 \begin{cases} f=\lambda\, e_1+\mu e_2 \\ \lambda+\mu=\frac{1}{2}-\mu=\frac{3}{2} \\ \mu=-1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad f=\frac{3e_1-2e_2}{2}. \end{aligned}$$

Conclusion, l'unique solution du problème de Cauchy $(\mathscr{P})$ est donnée par

$$\boxed{f=\frac{3e_1-2e_2}{2}: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{3\,\mathrm{e}^{x}-2\,\mathrm{e}^{2x}}{2}. \end{array}}$$

9. Soit $n\in\mathbb{N}$. Soit $(\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^{n+1}$ tel que

$$\sum_{k=0}^{n}\lambda_k\, e_k=0_{\mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})}.$$

Autrement dit,

$$\forall x\in\mathbb{R},\qquad \sum_{k=0}^{n}\lambda_k\,\mathrm{e}^{kx}=0_{\mathbb{R}}.$$

Supposons $\lambda_n \neq 0$. Alors, pour tout $k \leqslant n-1$, on a $\lambda_k \mathrm{e}^{kx} \underset{x\to+\infty}{\ll} \lambda_n \mathrm{e}^{nx}$. Donc

$$0 = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \mathrm{e}^{kx} \underset{x\to+\infty}{\sim} \lambda_n \mathrm{e}^{nx}.$$

Ce qui est impossible (si $\lambda_n \neq 0$, $x \mapsto \lambda_n \mathrm{e}^{nx}$ n'est pas la fonction nulle. Or seule la fonction nulle est équivalente à 0). Donc $\lambda_n = 0$. Par suite,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \mathrm{e}^{kx} = 0.$$

Alors, en procédant de même, si $\lambda_{n-1} \neq 0$, on obtient que

$$0 \underset{x\to+\infty}{\sim} \lambda_{n-1} \mathrm{e}^{(n-1)x}.$$

Ce qui est impossible si $\lambda_{n-1} \neq 0$. Donc $\lambda_{n-1} = \lambda_n = 0$. Puis par récurrence, on obtient que

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

Conclusion,

$$\boxed{(e_k)_{k\in[\![0;n]\!]} \text{ est libre.}}$$

Partie 2 : Cas général

Soient E un espace vectoriel de dimension 4 et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que F et G admettent un supplémentaire commun si et seulement si

$$(\bigstar) \qquad \exists H \begin{cases} F \oplus H = E \\ G \oplus H = E. \end{cases}$$

On souhaite démontrer que si F et G ont la même dimension alors, il existe un sous-espace vectoriel H qui soit supplémentaire à F et à G dans E. Autrement dit

$$\dim(F) = \dim(G) \qquad \Rightarrow \qquad \exists H \begin{cases} F \oplus H = E \\ G \oplus H = E. \end{cases}$$

10. Soit H un supplémentaire commun à F et à G. Alors,

$$F \oplus H = E \qquad \Rightarrow \qquad \dim(F) + \dim(H) = \dim(E) \qquad \Rightarrow \qquad \dim(F) = \dim(E) - \dim(H).$$

De même $G \oplus H = E \Rightarrow \dim(G) = \dim(E) - \dim(H)$. Dans ce cas,

$$\dim(F) = \dim(E) - \dim(H) = \dim(G).$$

Conclusion,

$$\boxed{\exists H \begin{cases} F \oplus H = E \\ G \oplus H = E \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \dim(F) = \dim(G).}$$

11. Supposons $F = G$. Puisque F est un sous-espace vectoriel de E et que par hypothèse E est de dimension finie, alors F admet un supplémentaire : il existe H un sous-espace vectoriel de E tel que $F \oplus H = E$. Et donc directement $G \oplus H = F \oplus H = E$. Conclusion,

$$\boxed{F = G \qquad \Rightarrow \qquad \exists H \begin{cases} F \oplus H = E \\ G \oplus H = E. \end{cases}}$$

12. Supposons $\dim(F) = \dim(G) = 0$. Alors nécessairement, $F = G = \{0_E\}$. Donc par la question précédente, ($\bigstar$) est vraie (et notamment $H = E$ ici). De même si $\dim(F) = \dim(G) = 4$. Puisque $F \subseteq E$, $G \subseteq E$ et $\dim(F) = \dim(G) = 4 = \dim(E)$, on en déduit que $F = E = G$. Donc par la question précédente ($\bigstar$) est vraie (et notamment $H = \{0_E\}$ ici). Conclusion,

$$\boxed{(\dim(F) = \dim(G) = 0 \quad \text{OU} \quad \dim(F) = \dim(G) = 4) \qquad \Rightarrow \qquad \exists H \ \begin{cases} F \oplus H = E \\ G \oplus H = E. \end{cases}}$$

On suppose dans toute la suite que $\dim(F) = \dim(G)$ et que $F \neq G$.

13. Procédons par l'absurde. Supposons $F \subset G$. Alors puisque $\dim(F) = \dim(G)$. Par propriété du cours, on en déduit que $F = G$, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse $F \neq G$. Conclusion,

$$\boxed{F \text{ n'est pas inclus dans } G.}$$

Par suite, $F \setminus G \neq \emptyset$ et donc

$$\boxed{\exists f \in F \setminus G.}$$

On admet de même (par symétrie des hypothèses) qu'il existe $g \in G \setminus F$. On pose $a = f + g$.

14. Montrons que F et $\mathrm{Vect}(a)$ sont en somme directe i.e. $F \cap \mathrm{Vect}(a) = \{0_E\}$. Soit $x \in F \cap \mathrm{Vect}(a)$. Alors $x \in \mathrm{Vect}(a)$ donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, $x = \lambda a = \lambda f + \lambda g$. D'autre part, $x \in F$ donc $\lambda f + \lambda g \in F$. Or $f \in F$. Donc $\lambda f \in F$. Donc par différence de deux éléments de F,

$$\lambda g = x - \lambda f \in F.$$

Supposons $\lambda \neq 0$. Alors, puisque F est un sous-espace vectoriel, $\frac{1}{\lambda}(\lambda g) \in F$ i.e. $g \in F$. Or par définition, $g \in G \setminus F$ donc $g \notin F$. Contradiction. D'où

$$\lambda = 0_{\mathbb{R}} \qquad \Rightarrow \qquad x = \lambda a = 0_E.$$

Ainsi, $F \cap \mathrm{Vect}(a) \subseteq \{0_E\}$. Or $\{0_E\} \subseteq F \cap \mathrm{Vect}(a)$. Donc $F \cap \mathrm{Vect}(a) = \{0_E\}$. Conclusion,

$$\boxed{F \text{ et } \mathrm{Vect}(a) \text{ sont en somme directe.}}$$

Procédons de même pour G et $\mathrm{Vect}(a)$. Soit $x \in G \cap \mathrm{Vect}(a)$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x = \lambda a = \lambda f + \lambda g \in G$. Donc $\lambda f \in G$. Or si $\lambda \neq 0$, alors $f \in G$ ce qui est contradictoire avec sa définition. Donc $\lambda = 0$ et $x = 0_E$. Ainsi, $G \cap \mathrm{Vect}(a) = \{0_E\}$. Conclusion,

$$\boxed{G \text{ et } \mathrm{Vect}(a) \text{ sont en somme directe.}}$$

15. On suppose dans cette question que $\dim(F) = \dim(G) = 3$. On pose $H = \mathrm{Vect}(a)$. Par la question précédente, H est en somme directe avec F ainsi qu'avec G. Supposons $a = 0_E$. Alors, $f + g = 0_E$ et donc $f = -g \in G$ contradictoire avec la définition de f. Donc $a \neq 0_E$ et (a) est libre. Or (a) engendre H. Donc (a) est une base de H. Ainsi,

$$\dim(H) = 1.$$

Dès lors, on observe que

$$\dim(F) + \dim(H) = 3 + 1 = 4 = \dim(E),$$

et F et H en somme directe. Donc F et H sont supplémentaires. De même, G et H sont en somme directe et

$$\dim(G) + \dim(H) = 3 + 1 = 4 = \dim(E).$$

Conclusion,

$$\boxed{\dim(F) = \dim(G) = 3 \qquad \Rightarrow \qquad \exists H \ \begin{cases} F \oplus H = E \\ G \oplus H = E. \end{cases}}$$

16. On suppose dans cette question que $\dim(F) = \dim(G) = 2$. On pose $F' = F \oplus \mathrm{Vect}(a)$ et $G' = G \oplus \mathrm{Vect}(a)$.

   (a) Puisque F et $\mathrm{Vect}(a)$ sont en somme directe, on a

   $$\dim\left(F'\right) = \dim(F \oplus \mathrm{Vect}(a)) = \dim(F) + \dim(\mathrm{Vect}(a)).$$

   On a déjà vu à la question 15. que $\dim(\mathrm{Vect}(a)) = 1$. Donc

   $$\dim\left(F'\right) = 2 + 1 = 3.$$

   De même,

   $$\dim\left(G'\right) = \dim(G \oplus \mathrm{Vect}(a)) = \dim(G) + \dim(\mathrm{Vect}(a)) = 2 + 1 = 3.$$

   Conclusion,

   $$\boxed{\dim\left(F'\right) = \dim\left(G'\right) = 3.}$$

   (b) **Premier cas,** supposons $F' = G'$. Alors, par la question 11., il existe H' un sous-espace vectoriel de E tel que $F' \oplus H' = E = G' \oplus H'$.
   Second cas, supposons $F' \neq G'$. Comme $\dim(F') = \dim(G') = 3$, d'après la question 15. il existe un sous-espace vectoriel H' tel que $F' \oplus H' = E = G' \oplus H'$.
   Dans tous les cas,

   $$\boxed{\exists H',\ \begin{cases} F' \oplus H' = E \\ G' \oplus H' = E. \end{cases}}$$

   (c) Montrons que H' et $\mathrm{Vect}(a)$ sont en somme directe. Soit $x \in H' \cap \mathrm{Vect}(a)$. Alors $x \in H'$ et $x \in \mathrm{Vect}(a)$ donc notamment $x \in F' = F + \mathrm{Vect}(a)$ (ou G' peu importe). Donc $x \in H' \cap F'$. Or F' et H' sont supplémentaires dans E donc notamment en somme directe. D'où $F' \cap H' = \{0_E\}$ et donc $x \in \{0_E\}$ et donc $x = 0_E$. Ainsi, $H' \cap \mathrm{Vect}(a) \subseteq \{0_E\}$ et $\{0_E\} \subseteq H' \cap \mathrm{Vect}(a)$. D'où $H' \cap \mathrm{Vect}(a) = \{0_E\}$. Conclusion,

   $$\boxed{H' \text{ et } \mathrm{Vect}(a) \text{ sont en somme directe.}}$$

   (d) On pose $H = H' \oplus \mathrm{Vect}(a)$. Alors, on observe que

   $$\dim(H) = \dim\left(H' \oplus \mathrm{Vect}(a)\right) = \dim\left(H'\right) + \dim(\mathrm{Vect}(a)) \qquad \text{car la somme est directe.}$$

   Or H' est un supplémentaire de F' dans E. Donc $\dim(H') = \dim(E) - \dim(F') = 4 - 3 = 1$ par la question 16.a. Ainsi,

   $$\dim(H) = 1 + 1 = 2.$$

   Soit $x \in E$. Puisque H' est un supplémentaire de F' dans E, il existe $(y, z) \in F' \times H'$ tel que $x = y + z$. Or $F' = F + \mathrm{Vect}(a)$. Donc il existe $y_1 \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y = y_1 + \lambda\, a$. Ainsi,

   $$x = \underbrace{y_1}_{\in F} + \underbrace{\lambda\, a + z}_{\in \mathrm{Vect}(a) + H' = H}$$

   Donc $x \in F + H$. Ainsi, $E \subseteq F + H$. Or $F + H \subseteq E$. Donc $F + H = E$. Or $\dim(F) + \dim(H) = 2 + 2 = 4 = \dim(E)$. Ainsi,

   $$F \oplus H = E.$$

   A la place de montrer que $E = F + H$, on pouvait aussi montrer que F et H étaient en somme directe.
   De même, on a $E = G' + H' = (G + \mathrm{Vect}(a)) + H' = G + (\mathrm{Vect}(a) + H') = G + H$ et $\dim(G) + \dim(H) = 2 + 2 = 4 = \dim(E)$. Conclusion,

   $$\boxed{\dim(F) = \dim(G) = 2 \qquad \Rightarrow \qquad \exists H \begin{cases} F \oplus H = E \\ G \oplus H = E. \end{cases}}$$

17. On suppose que $\dim(F) = \dim(G) = 1$.

(a) On sait que $f \notin G$. Or G est un sous-espace vectoriel de E donc $0_E \in G$. Donc $f \neq 0_E$. De plus, $f \in F$. Donc (f) est une famille libre de E. Or

$$\text{Card}(f) = 1 = \dim(F).$$

Donc (f) est une famille base de F et donc notamment une famille génératrice de F i.e. $F = \text{Vect}(f)$. De même $g \notin F$ donc $g \neq 0_E$. Donc (g) est une famille libre de G et $\text{Card}(g) = 1 = \dim(G)$. Donc (g) est une base de G et donc une famille génératrice de G. Conclusion,

$$\boxed{F = \text{Vect}(f) \qquad \text{et} \qquad G = \text{Vect}(g).}$$

(b) On pose $P = F + G$ et H_0 un supplémentaire de P dans E. Enfin, on définit $H = H_0 + \text{Vect}(a)$. F et G sont en somme directe : en effet, pour $x \in F \cap G$, on a $x \in F$ et $x \in G$ donc par la question précédente, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$x = \lambda f = \mu g.$$

Donc $\lambda f \in G$, on $f \notin G$ donc $\lambda = 0$ et donc $x = 0_E$. Ainsi, $F \cap G \subseteq \{0_E\}$. Or $\{0_E\} \subseteq F \cap G$. Donc $F \cap G = \{0_E\}$ et F et G sont en somme directe. Donc $P = F \oplus G$ et

$$\dim(P) = \dim(F) + \dim(G) = 2.$$

On observe que $a = f + g \in F + G = P$ donc $\text{Vect}(a) \subseteq P$. Ainsi, $H_0 \cap \text{Vect}(a) \subseteq H_0 \cap P = \{0_E\}$ car H_0 est un supplémentaire de P. De plus, $\{0_E\} \subseteq H_0 \cap \text{Vect}(a)$. Donc $H_0 \cap \text{Vect}(a) = \{0_E\}$ et H_0 et $\text{Vect}(a)$ sont en somme directe. Ainsi,

$$\dim(H) = \dim(H_0 \oplus \text{Vect}(a)) = \dim(H_0) + \dim(\text{Vect}(a)).$$

Or H_0 est un supplémentaire de P donc $\dim(H_0) = \dim(E) - \dim(P) = 4 - 2 = 2$. Ainsi,

$$\dim(H) = 2 + 1 = 3.$$

Dès lors, on a $\dim(H) + \dim(F) = 3 + 1 = 4 = \dim(E)$ et de même $\dim(H) + \dim(G) = \dim(E)$. Soit $x \in H \cap F$. Alors, $x \in F = \text{Vect}(f)$. Donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x = \lambda f$. De plus, $x \in H = H_0 + \text{Vect}(a)$. Donc il existe $y \in H_0$ et $\mu\mathbb{R}$ tel que $x = y + \mu a = y + \mu f + \mu g$. Ainsi,

$$\lambda f = y + \mu f + \mu g \qquad \Leftrightarrow \qquad (\lambda - \mu) f - \mu g = y.$$

Donc $y \in \text{Vect}(f, g) = \text{Vect}(f) + \text{Vect}(g) = F + G = P$. Or $y \in H_0$ donc $y \in H_0 \cap P$. Or H_0 et P sont supplémentaires donc en somme directe donc $H_0 \cap P = \{0_E\}$ et $y = 0_E$. D'où

$$(\lambda - \mu) f - \mu g = 0_E \qquad \Leftrightarrow \qquad (\lambda - \mu) f = \mu g.$$

Donc $\mu g \in F$ or $g \notin F$ donc $\mu = 0_{\mathbb{R}}$. Ainsi,

$$x = y + \mu a = 0_E + 0_{\mathbb{R}} a = 0_E.$$

D'où $H \cap F \subseteq \{0_E\}$. Or $\{0_E\} \subseteq H \cap F$. Donc $H \cap F = \{0_E\}$. Or on a vu que $\dim(F) + \dim(H) = \dim(E)$. Donc F et H sont supplémentaires dans E.
De même, soit $x \in H \cap G$, alors, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $y \in H_0$, $x = y + \lambda a = \mu g$. Donc

$$y = \mu g - \lambda a = (\mu - \lambda) g - \lambda f \in P.$$

Donc $y \in H_0 \cap P$ donc $y = 0_E$. Ainsi, $(\mu - \lambda) g - \lambda f = 0_E$ i.e. $\lambda f = (\mu - \lambda) g$. Donc $\lambda = 0$ et $x = y + \lambda a = 0_E$. D'où $H_0 \cap P \subseteq \{0_E\}$. Or $\{0_E\} \subseteq H_0 \cap P$. Donc $H_0 \cap P = \{0_E\}$. De plus, $\dim(F) + \dim(H) = \dim(E)$. Donc F et H sont supplémentaires dans E. Conclusion,

$$\boxed{\dim(F) = \dim(G) = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \exists H \ \begin{cases} F \oplus H = E \\ G \oplus H = E. \end{cases}}$$

Partie 3 : Une application linéaire

On considère l'application f définit pour tout $P \in \mathbb{R}_3[X]$ par $f(P) = X^2P'' - 3XP' + 3P$.

18. Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$. Il est clair que $f(P) \in \mathbb{R}[X]$. Montrons que $\deg(f(P)) \leqslant 3$. On a

$$\deg(f(P)) = \deg\left(X^2P'' - 3XP' + 3P\right) \leqslant \max\left(\deg\left(X^2P''\right), \deg\left(XP'\right), \deg(P)\right).$$

Or $\deg(P'') \leqslant \deg(P) - 2 \leqslant 3 - 2 = 1$. Donc $\deg\left(X^2P''\right) \leqslant 2 + 1 = 3$. De même, $\deg(XP') \leqslant 1 + 3 - 1 = 3$. Ainsi,

$$\deg(f(P)) \leqslant \max(2, 3, 3) = 3.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall P \in \mathbb{R}_3[X], \qquad \deg(f(P)) \leqslant 3.}$$

19. Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(P, Q) \in \mathbb{R}_3[X]^2$. Alors,

$$\begin{aligned} f(\lambda P + \mu Q) &= X^2(\lambda P + \mu Q)'' - 3X(\lambda P + \mu Q)' + 3(\lambda P + \mu Q) \\ &= \lambda X^2P'' + \mu X^2Q'' - 3\lambda XP' - 3\mu XQ' + 3\lambda P + 3\mu Q \text{ par linéarité de la dérivation} \\ &= \lambda\left(X^2P'' - 3XP' + 3P\right) + \mu\left(X^2Q'' - 3XQ' + 3Q\right) \\ &= \lambda f(P) + \mu f(Q). \end{aligned}$$

Donc f est linéaire.

De plus, par la question précédente, pour tout $P \in \mathbb{R}_3[X]$, on a $\deg(f(P)) \leqslant 3$ i.e. $f(P) \in \mathbb{R}_3[X]$. Donc f va bien de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}_3[X]$. Conclusion,

$$\boxed{f \text{ est un endomorphisme } \mathbb{R}_3[X] : f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_3[X]).}$$

20. Soit $P = aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{R}_3[X]$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} P \in \operatorname{Ker}(f) \quad &\Leftrightarrow \quad f(P) = 0_{\mathbb{R}[X]} \\ &\Leftrightarrow \quad X^2(6aX + 2b) - 3X\left(3aX^2 + 2bX + c\right) + 3\left(aX^3 + bX^2 + cX + d\right) = 0_{\mathbb{R}[X]} \\ &\Leftrightarrow \quad (6a - 9a + 3a)X^3 + (2b - 6b + 3b)X^2 + (-3c + 3c)X + 3d = 0_{\mathbb{R}[X]} \\ &\Leftrightarrow \quad -bX^2 + 3d = 0_{\mathbb{R}[X]}. \end{aligned}$$

Par unicité des coefficients d'un polynôme,

$$P \in \operatorname{Ker}(f) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -b = 0 \\ 3d = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad b = d = 0.$$

Ainsi,

$$\operatorname{Ker}(f) = \left\{ aX^3 + cX \mid (a, c) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \operatorname{Vect}\left(X, X^3\right).$$

La famille $\left(X, X^3\right)$ est libre en tant que sous-famille de la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ et engendre $\operatorname{Ker}(f)$ donc forme une base de $\operatorname{Ker}(f)$. Conclusion,

$$\boxed{\left(X, X^3\right) \text{ est une base de } \operatorname{Ker}(f) \text{ et } \dim(\operatorname{Ker}(f)) = \operatorname{Card}\left(X, X^3\right) = 2.}$$

21. Dans la question précédente, on a vu que pour $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$, $f(P) = -bX^2 + 2bX + 3d$. Ainsi,

$$\operatorname{Im}(f) = \left\{ -bX^2 + 2bX + 3d \mid (b, d) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \operatorname{Vect}\left(3, -X^2 + 2X\right).$$

Or les opérations élémentaires ne modifient pas l'espace engendré. Donc

$$\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Vect}\left(1, X^2 - 2X\right) \qquad \begin{array}{l} C_1 \leftarrow \frac{1}{3}C_1 \\ C_2 \leftarrow -C_2 \end{array}$$

Les vecteurs 1 et $X^2 - 2X$ ne sont pas colinéaires (ou de degrés distincts) donc la famille $\left(1, X^2 - 2x\right)$ est libre et donc engendre $\mathrm{Im}\,(f)$. Conclusion,

$$\boxed{\left(1, X^2 - 2X\right) \text{ est une base de } \mathrm{Im}\,(f) \text{ et } \dim\left(\mathrm{Im}\,(f)\right) = \mathrm{Card}\left(1, X^2 - X\right) = 2.}$$

22. On sait que $\left(X, X^3\right)$ est une base de $\mathrm{Ker}\,(f)$ et $\left(1, X^2 - 2X\right)$ est une base de $\mathrm{Im}\,(f)$. Posons $\mathscr{B} = \left(X, X^3, 1, X^2 - 2X\right)$. La famille $\mathscr{B}$ est une famille de polynômes de degrés distincts donc $\mathscr{B}$ est libre. De plus, $\mathrm{Card}\,(\mathscr{B}) = 4 = \dim\left(\mathbb{R}_3[X]\right)$. Donc $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$. Conclusion, par le théorème de la base adaptée :

$$\boxed{\mathrm{Ker}\,(f) \text{ et } \mathrm{Im}\,(f) \text{ sont supplémentaires dans } \mathbb{R}_3[X].}$$

23. Soit $F = \mathrm{Ker}\,(f)$ et $G = \mathrm{Im}\,(f)$. On a vu que dans les questions précédentes que $\dim(F) = 2$ et $\dim(G) = 2$. De plus, $1 \in G$. Or

$$f\,(1) = 0 - 3 \times 0 + 3 = 3 \neq 0_{\mathbb{R}[X]}.$$

Donc $1 \notin F$. Donc $F \neq G$. Posons $g = 1 \in G \setminus F$. Posons également $f = X$. Alors, par la question 20. $f \in F$. Supposons $f \in G = \mathrm{Vect}\left(1, X^2 - X\right)$. Alors, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$X = f = a + b\left(X^2 - X\right) \qquad \Leftrightarrow \qquad bX^2 - (b+1)\,X + a = 0_{\mathbb{R}[X]}.$$

Par unicité des coefficient d'un polynôme, on obtient que

$$\begin{cases} b = 0 \\ b + 1 = 0 \\ a = 0 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} b = 0 \\ 1 = 0 \\ a = 0 \end{cases}$$

ce qui est impossible. Donc $f \notin G$. Posons alors $a = f + g = X + 1$ puis $F' = F + \mathrm{Vect}\,(a)$ et $G' = G + \mathrm{Vect}\,(a)$. On a donc

$$F' = \mathrm{Vect}\left(X, X^3\right) + \mathrm{Vect}\,(1 + X) = \mathrm{Vect}\left(1 + X, X, X^3\right).$$

Les opérations élémentaires ne modifient pas l'espace engendré donc

$$F' = \mathrm{Vect}\left(1, X, X^3\right) \qquad C_1 \leftarrow C_1 - C_2.$$

De même,

$$\begin{aligned} G' = \mathrm{Vect}\left(1, X^2 - 2X, 1 + X\right) &= \mathrm{Vect}\left(1, X^2 - 2X, X\right) && C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \\ &= \mathrm{Vect}\left(1, X^2, X\right) && C_2 \leftarrow C_2 - C_3 \\ &= \mathrm{Vect}\left(1, X, X^2\right) && C_2 \leftrightarrow C_3. \end{aligned}$$

Les familles $\mathscr{B}_{F'} = \left(1, X, X^3\right)$ et $\mathscr{B}_{G'} = \left(1, X, X^2\right)$ sont libres en tant que sous-famille de la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. Donc $\mathscr{B}_{F'}$ est une base de F' et $\mathscr{B}_{G'}$ est une base de G'. Ainsi,

$$\dim\left(F'\right) = \dim\left(G'\right) = 3.$$

On observe de plus que $f' = X^3 \in F' \setminus G'$ et $g' = X^2 \in G' \setminus F'$. Posons donc $a' = f' + g' = X^3 + X^2$. Par la question 15. on en déduit que

$$H' = \mathrm{Vect}\left(a'\right) = \mathrm{Vect}\left(X^3 + X^2\right) \text{ est un supplémentaire commun à } F' \text{ et à } G'.$$

On pose $H = H' + \mathrm{Vect}\,(a) = \mathrm{Vect}\left(X^3 + X^2\right) + \mathrm{Vect}\,(X + 1) = \mathrm{Vect}\left(X^3 + X^2, X + 1\right)$. Par la question 16. on en conclut que

$$\boxed{H = \mathrm{Vect}\left(X^3 + X^2, X + 1\right) \text{ est un supplémentaire commun à } F = \mathrm{Ker}\,(f) \text{ et } G = \mathrm{Im}\,(g).}$$

Exercice II - Séries numériques

Soient $a \in \mathbb{R}_+$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On souhaite déterminer les valeurs de a et α pour lesquelles la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge avec

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = \frac{n^\alpha}{(1+a)\left(1+a^2\right)\left(1+a^3\right)\cdots\left(1+a^n\right)}.$$

Partie 1 : Cas $a = 0$

On suppose dans cette partie que $a = 0$. Dans ce cas,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = n^\alpha.$$

1. La série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} n^\alpha$ est une série de Riemann d'exposant $-\alpha$. Donc

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}} n^\alpha \text{ converge} \qquad \Leftrightarrow \qquad -\alpha > 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \alpha < -1.}$$

2. On suppose que $\alpha = -3$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $N \geqslant n+1$. La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^3}$ est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$. Par le théorème de comparaison série-intégrale, puisque $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}
& \int_{n+1}^{N+1} \frac{1}{t^3}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} u_k \leqslant \int_{n}^{N} \frac{1}{t^3}\,\mathrm{d}t \\
\Leftrightarrow \quad & \left[-\frac{1}{2t^2}\right]_{n+1}^{N+1} \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} u_k \leqslant \left[-\frac{1}{2t^2}\right]_{n}^{N} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{1}{2(n+1)^2} - \frac{1}{2(N+1)^2} \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} u_k \leqslant \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{2N^2}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall N \geqslant n+1, \qquad \frac{1}{2(n+1)^2} - \frac{1}{2(N+1)^2} \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} u_k \leqslant \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{2N^2}.}$$

3. Puisque $\alpha = -3 < -2$, on sait par la question 1. que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge. Donc son reste d'ordre n existe i.e. $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{N} u_k$ existe. Donc par passage à la limite quand $N \to +\infty$ dans la question précédente :

$$\frac{1}{2(n+1)^2} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leqslant \frac{1}{2n^2}$$

On sait que $n+1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n$. Donc par élévation à la puissance -2, on obtient que $\frac{1}{(n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$. Ainsi,

$$\frac{1}{2(n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}.$$

Donc par le théorème d'encadrement des équivalents, on en conclut que

$$\boxed{\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}.}$$

Partie 2 : Cas $a = 1$

On suppose que $a = 1$. Dans ce cas,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = \frac{n^\alpha}{(1+1)(1+1^2)\cdots(1+1^n)} = \frac{n^\alpha}{2\times 2\times\cdots\times 2} = \frac{n^\alpha}{2^n}.$$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n^2 u_n = \frac{n^{\alpha+2}}{2^n}$. Donc par croissance comparée,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} n^2 u_n = 0.}$$

5. Par la question précédente, on en déduit qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $0 \leqslant n^2 u_n \leqslant 1$ i.e. $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n^2}$. Or $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ converge en tant que série de Riemann d'exposant $\alpha = 2 > 1$. Donc par le théorème de comparaison,

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n \text{ converge.}}$$

6. Pour tout $x \in \left]-1;1\right[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k.$$

   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale donc notamment sur $\left]-1;1\right[$. De plus,

$$\forall x \in \left]-1;1\right[, \qquad x f_n'(x) = x\sum_{k=1}^{n} k x^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} k x^k = \sum_{k=0}^{n} k x^k - 0.$$

   Conclusion, $\boxed{f_n \text{ est dérivable sur } \left]-1;1\right[}$ et

$$\boxed{\forall x \in \left]-1;1\right[, \qquad x f_n'(x) = \sum_{k=0}^{n} k x^k.}$$

   (b) Soit $x \in \left]-1;1\right[$. On observe que $f_n(x)$ est une somme géométrique de raison $x \neq 1$. Donc

$$f_n(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

   La fonction $x \mapsto \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ est dérivable sur $\left]-1;1\right[$ et on obtient que

$$\begin{aligned}\forall x \in \left]-1;1\right[, \qquad f_n'(x) &= \frac{-(n+1)x^n(1-x) + \left(1-x^{n+1}\right)}{(1-x)^2}\\ &= \frac{-(n+1)x^n + (n+1-1)x^{n+1} + 1}{(1-x)^2}.\end{aligned}$$

   Ainsi par la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \left]-1;1\right[$,

$$\sum_{k=0}^{n} k x^k = x f_n'(x) = \frac{x\left(n x^{n+1} - (n+1)x^n + 1\right)}{(1-x)^2}.$$

Notamment, pour $x = \frac{1}{2} \in]-1;1[$, il vient

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2^k} &= \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2^{n+1}} - \frac{n+1}{2^n} + 1\right)}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} \\ &= \frac{\frac{1}{2^{n+2}}\left(n - 2n - 2 + 2^{n+1}\right)}{\frac{1}{4}} \\ &= \frac{2^{n+1} - n - 2}{2^n}\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}.}$$

Formule que l'on peut vérifier au rang $n = 0$, $n = 1$ ou $n = 2$.

(c) On suppose que $\alpha = 1$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{n}{2^n}$. Donc par la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}.$$

Or par croissance comparée, $\frac{n+2}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On retrouve donc bien que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge et

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty} 2 - \frac{n+2}{2^n} = 2.}$$

Partie 3 : Cas $a > 1$

On suppose que $a > 1$.

7. Pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, $1 + a^k \geqslant 2$. Donc par produit, comme tous les termes sont positifs, on obtient directement que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad (1+a)\left(1+a^2\right)\cdots(1+a^n) \geqslant 2^n.}$$

8. Par la question précédente, comme $n^\alpha > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leqslant u_n \leqslant \frac{n^\alpha}{2^n}.$$

Or par la partie précédente, on a vu que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{n^\alpha}{2^n}$ converge. Donc par le théorème de comparaison,

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n \text{ converge.}}$$

Partie 4 : Cas $0 < a < 1$

On suppose que $0 < a < 1$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \ln(u_n)$.

9. Puisque $a \in]0;1[$, on a $a^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc

$$\ln(1+a^n) \underset{n\to+\infty}{\sim} a^n.$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a^n \geqslant 0$ donc $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \ln(1+a^n)$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} a^n$ sont de même nature. Or la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} a^n$ converge en tant que série géométrique de raison $a \in]-1;1[$. Conclusion,

$$\boxed{\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \ln(1+a^n) \text{ converge.}}$$

On note ℓ sa somme totale.

10. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$v_n = \ln(u_n) = \ln\left(\frac{n^\alpha}{\prod_{k=1}^n (1+a^k)}\right) = \alpha \ln(n) - \sum_{k=1}^n \ln\left(1+a^k\right).$$

On sait par la question précédente que $\sum_{k=1}^n \ln\left(1+a^k\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$. On en déduit donc que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = \begin{cases} -\infty \text{ si } \alpha < 0 \\ -\ell \text{ si } \alpha = 0 \\ +\infty \text{ si } \alpha > 0. \end{cases}}$$

Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \mathrm{e}^{v_n}$. Par composée, on en déduit que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \begin{cases} 0 \text{ si } \alpha < 0 \\ \mathrm{e}^{-\ell} \text{ si } \alpha = 0 \\ +\infty \text{ si } \alpha > 0. \end{cases}}$$

11. Si $\alpha \geqslant 0$, par la question précédente, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne tend pas vers 0 (car $\mathrm{e}^{-\ell} > 0$ pour $\alpha = 0$ et sinon elle diverge vers $+\infty$). Dans ce cas,

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n \text{ diverge grossièrement.}}$$

12. Soit $\alpha < 0$. On a vu que

$$\sum_{k=1}^n \ln\left(1+a^k\right) \underset{n\to+\infty}{=} \ell + o(1).$$

Donc

$$v_n \underset{n\to+\infty}{=} \alpha \ln(n) + \ell + o(1).$$

Ainsi,

$$u_n = \mathrm{e}^{v_n} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{e}^{\alpha\ln(n)+\ell+o(1)} \underset{n\to+\infty}{=} n^\alpha \mathrm{e}^\ell \mathrm{e}^{o(1)} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{\mathrm{e}^\ell}{n^{-\alpha}}(1+o(1)).$$

Conclusion,

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^\ell}{n^{-\alpha}}.}$$

13. Par la question précédente, et puisque pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{\mathrm{e}^\ell}{n^{-\alpha}} > 0$, on en déduit que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\mathrm{e}^\ell}{n^{-\alpha}}$ sont de même nature. Or e^ℓ étant une constante non nulle, on observe que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\mathrm{e}^\ell}{n^{-\alpha}}$ est une série de Riemann d'exposant $-\alpha$. Ainsi,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n \text{ converge} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\mathrm{e}^\ell}{n^{-\alpha}} \text{ converge} \quad \Leftrightarrow \quad -\alpha > 1 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha < -1.$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{Si } \alpha < -1 \text{ alors, } \sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n \text{ converge et si } \alpha \in [-1;0[, \sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n \text{ diverge (mais pas grossièrement).}}$$

14. Par les parties précédentes, on sait que
    - si $a = 0$, alors la série converge si et seulement si $\alpha < -1$,
    - si $0 < a < 1$, alors la série converge si et seulement si $\alpha < -1$,
    - si $a = 1$, alors la série converge pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,
    - si $a > 1$, alors la série converge pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

    Conclusion, l'ensemble $\mathscr{S}$ est donnée par la partie rouge ci-dessous :