Devoir Maison 9
Applications linéaires, dénombrement, probabilités

A faire pour le vendredi 22 avril

Exercice I - Applications linéaires

Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$. On se propose d'étudier f lorsqu'il est nilpotent i.e. lorsqu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $f^p = 0_{\mathscr{L}(E)}$. Plus précisément, on dira alors que f est un endomorphisme nilpotent d'ordre p.

Partie 1 : Un exemple dans $\mathbb{R}^3$

Soit

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} & \mapsto & \begin{bmatrix} -x+z \\ 3x+y-2z \\ x+y \end{bmatrix} \end{array}.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

2. Déterminer le noyau et l'image de f et préciser leurs dimensions.

3. Montrer que $\mathrm{Ker}\,(f) \subseteq \mathrm{Im}\,(f)$.

Méthode 1, la méthode Rahan (ou presque)

4. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, calculer $f^2(x, y, z)$.

5. Déterminer $\mathrm{Im}\left(f^2\right)$.

6. Soit $(u, v) \in \mathscr{L}(E)^2$. Montrer que $u \circ v = 0_{\mathscr{L}(E)} \Leftrightarrow \mathrm{Im}\,(v) \subseteq \mathrm{Ker}\,(u)$.

7. Déduire des deux questions précédentes que f est nilpotente d'ordre 3.

Méthode 2, par l'image d'une base, finalement c'est moins basique.
On pose $e_1 = (1, -1, 1)$. On admet l'existence de deux vecteurs $e_2 \in \mathbb{R}^3$ et $e_3 \in \mathbb{R}^3$ tels que $f(e_2) = e_1$ et $f(e_3) = e_2$. On pose $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

8. Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

   On pourra commencer par composer deux fois par f l'expression $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3$.

9. Calculer $f^3(\mathscr{B})$.

10. Conclure à nouveau que f est nilpotente.

11. Déterminer $e_2 \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(e_2) = e_1$.

12. Déterminer $e_3 \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(e_3) = e_2$.

13. Retrouver alors le résultat de la question 8.

Partie 2 : Cas général

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$, $f \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$. On note $n = \dim(E)$ et on suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 2$ tel que $f^p = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

14. Montrer que $f \notin \mathrm{GL}(E)$.
15. Déterminer tous les projecteurs nilpotents de E.
16. Montrer que $P = \left\{ k \in \mathbb{N} \mid f^k \neq 0_{\mathscr{L}(E)} \right\}$ est non vide et majoré et donc admet un maximum.

On note $m = \max(P) + 1$ et l'on cherche à démontrer que $m \leqslant n$. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on pose $K_i = \mathrm{Ker}\left(f^i\right)$ et $u_i = \dim(K_i)$.

17. Préciser K_m.
18. Pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}^2$, $i \leqslant j$, montrer que $K_i \subseteq K_j$. En déduire la monotonie de $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$.
19. Justifier que pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $1 \leqslant u_i \leqslant n$.
20. Montrer qu'il existe $q \in [\![1; n]\!]$ tel que $u_{q+1} = u_q$.
21. En déduire que $K_{q+1} = K_q$ puis que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $K_{q+i} = K_q$.
22. Montrer que $K_m = K_q$.
23. Conclure que $m \leqslant n$.

Exercice II - Dénombrement

En plus de faire du foot à cloche pied comme Lucas, Augustin a décidé de procéder à sa rééducation sportive en faisant un nombre entier de longueurs de piscine chaque dimanche pendant p dimanches. On suppose qu'Augustin est capable de faire entre 1 et n longueurs de piscine par entrainement (bien sûr n est très grand et notamment $n \geqslant p \geqslant 10$) et on note x_i le nombre de longueurs effectuées le dimanche numéro $i \in [\![1; p]\!]$ que Louis, son entraineur, note consciencieusement dans son carnet pendant p dimanches successifs.

Partie 1 : Quand Augustin fait un peu ce qu'il veut

1. Combien de résultats $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ différents, Louis pourrait-il obtenir ?
2. Louis interdit dans cette question uniquement à Augustin de faire deux fois la même longueur parmi tous les dimanches. Combien de résultats sont possibles ?
3. On sait qu'Augustin a fait six longueurs à trois reprises exactement. Combien de résultats sont possibles ?
4. On sait qu'Augustin a réussi à faire dix longueurs exactement au moins une fois. Combien de résultats sont possibles ?

Partie 2 : Quand Augustin progresse

Soient E un ensemble possédant p éléments, F un ensemble possédants n **autres** éléments et $G = E \cup F$.

5. Calculer le nombre de parties de G possédant p éléments.
6. Calculer le nombre de parties de G possédant p éléments dont $q \in [\![0; p]\!]$ dans E.

7. En déduire la formule de Vandermonde :
$$\sum_{q=0}^{p}\binom{p}{q}\binom{n}{p-q}=\binom{n+p}{p}.$$

8. On suppose qu'Augustin améliore son score strictement chaque dimanche. Combien de résultats Louis pourrait-il obtenir ?

9. On suppose que chaque dimanche Augustin égalise ou augmente strictement son score du dimanche précédent : pour tout $k \in [\![1;n-1]\!]$, $x_{k+1} \geqslant x_k$.

   (a) Soit $q \in [\![0;p]\!]$. On suppose qu'Augustin égalise son score q dimanches différents exactement et s'améliore strictement les autres dimanches. Combien de résultats sont possibles ?

   (b) En déduire le nombre total de résultats possibles lorsqu'Augustin égalise ou augmente strictement son score chaque dimanche.

Exercice III - Probabilités

Partie 1 : Mise en place de la chaîne

On modélise le comportement d'un étudiant de PTSI par la chaîne de Markov suivante.

- On suppose qu'à chaque étape, l'étudiant se trouve dans l'un des états suivants : il dort ou il mange ou il travaille (ça lui arrive). On note X_k la variable aléatoire décrivant l'état de l'étudiant à l'étape k : $X_k = 1$ lorsque l'étudiant dort (état primaire), $X_k = 2$ lorsque l'étudiant mange (cela le met dans un état second de manger) et $X_k = 3$ lorsque l'étudiant travaille (état suprême).
- Lorsque l'étudiant dort à l'étape k, il a une chance sur deux de se réveiller et une chance sur deux de continuer à roupiller (le paresseux) à l'étape $k+1$. S'il se réveille il choisit équitablement entre prendre un petit déjeuner ou directement aller travailler (une illumination soudaine) à l'étape $k+1$.
- Lorsque l'étudiant mange à l'étape k, il choisit équitablement ou d'aller faire la sieste pour digérer (ça fatigue de manger) ou d'aller travailler (on ne va peut-être pas se recoucher après le petit déjeuner) à l'étape $k+1$.
- Lorsque l'étudiant travaille à l'étape k, il choisit équitablement ou d'aller dormir ou d'aller manger (on ne va pas non plus travailler deux étapes à la suite).

1. Soit $k \in \mathbb{N}$. Calculer pour tout $j \in [\![1;3]\!]$, $\mathbb{P}(X_{k+1} = j)$ en fonction de $(\mathbb{P}(X_k = i))_{i\in[\![1;3]\!]}$.
2. On suppose dans cette question que $X_0 \sim \mathscr{U}([\![1;3]\!])$. Déterminer la loi de X_1. *On donnera dans un tableau les issues de X_1 et les probabilités associées.*

On suppose dans toute la suite qu'à l'instant initial l'étudiant mange (cela ne surprendra personne, bande de goinfres) i.e. $X_0 = 2$.

3. On pose $Y_1 = \frac{X_1 - 1}{2}$. Reconnaître la loi de Y_1.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la probabilités que l'étudiant hiberne entre les étapes 1 et n (comprises).

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $U_k = \begin{bmatrix}\mathbb{P}(X_k = 1)\\ \mathbb{P}(X_k = 2)\\ \mathbb{P}(X_k = 3)\end{bmatrix}$ et $A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}2 & 2 & 2\\ 1 & 0 & 2\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix}$.

5. Vérifier que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $U_{k+1} = AU_k$.
6. Calculer U_2 puis U_4.
7. Calculer la probabilité que l'étudiant travaille à l'étape 2 sachant qu'il dormira à l'étape 4.

Partie 2 : L'algèbre linéaire est partout

Soit

$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} & \mapsto & \begin{bmatrix} \frac{x+y+z}{2} \\ \frac{x+y+z}{4} \\ \frac{x+y+z}{4} \end{bmatrix} \end{array}$$

8. Montrer que f_1 est un projecteur et déterminer ses éléments caractéristiques.

On pose également $e_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $e_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$,

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ X & \mapsto & AX \end{array}, \qquad f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} & \mapsto & \frac{y-z}{2} e_2 \end{array}, \qquad f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} & \mapsto & \frac{-x+y+z}{4} e_3 \end{array}$$

On admet que f, f_2, f_3 sont des endomorphismes.

9. Calculer $f_1 + f_2 + f_3$, $f \circ f_1$, $f \circ f_2$ et $f \circ f_3$ en fonction de $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$, f_1, f_2 et f_3.
10. En déduire pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, f^k en fonction de f_1, f_2, f_3.
11. En déduire pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, U_k.
12. Quelle est la probabilité asymptotique que l'étudiant travaille à l'étape n, lorsque n tend vers $+\infty$?