Correction du Devoir Maison 9
Applications linéaires, dénombrement, probabilités

Du vendredi 22 avril

Exercice I - Applications linéaires

Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$. On se propose d'étudier f lorsqu'il est nilpotent i.e. lorsqu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $f^p = 0_{\mathscr{L}(E)}$. Plus précisément, on dira alors que f est un endomorphisme nilpotent d'ordre p.

Partie 1 : Un exemple dans $\mathbb{R}^3$

Soit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} & \mapsto & \begin{bmatrix} -x+z \\ 3x+y-2z \\ x+y \end{bmatrix} \end{array}.$$

1. Trop facile. Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\left(u = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}\right) \in \left(\mathbb{R}^3\right)^2$. Alors,

$$\begin{aligned} f(\lambda u + \mu v) &= f\left(\begin{bmatrix} \lambda x + \mu x' \\ \lambda y + \mu y' \\ \lambda z + \mu z' \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} -\lambda x - \mu x' + \lambda z + \mu z' \\ 3\lambda x + 3\mu x' + \lambda y + \mu y' - 2\lambda z - 2\mu z' \\ \lambda x + \mu x' + \lambda y + \mu y' \end{bmatrix} \\ &= \lambda \begin{bmatrix} -x+z \\ 3x+y-2z \\ x+y \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} -x'+z' \\ 3x'+y'-2z' \\ x'+y' \end{bmatrix} \\ &= \lambda f(u) + \mu f(v). \end{aligned}$$

De plus, f va bien de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ par construction. Conclusion,

$$\boxed{f \in \mathscr{L}(E) \text{ i.e. } f \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}^3.}$$

2. Soit $u = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
u \in \operatorname{Ker}(f) \quad &\Leftrightarrow \quad f(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -x + z = 0 \\ 3x + y - 2z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -x + z = 0 \\ y + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -x + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \qquad L_2 = L_3 \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = z \\ y = -z \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad u = \begin{bmatrix} z \\ -z \\ z \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right).$$

Le vecteur $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ est non nul et est donc une famille libre et engendre $\operatorname{Ker}(f)$. Ainsi $\mathscr{B}_K = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ est une base de $\operatorname{Ker}(f)$. Donc

$$\dim(\operatorname{Ker}(f)) = \operatorname{Card}(\mathscr{B}_K) = 1.$$

On en déduit par le théorème du rang que

$$\operatorname{rg}(f) = \dim\left(\mathbb{R}^3\right) - \dim(\operatorname{Ker}(f)) = 3 - 1 = 2.$$

Notons $\mathscr{C} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Puisqu'elle engendre $\mathbb{R}^3$, on a

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}(f(\mathscr{C})) &= \operatorname{Vect}\left(f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right), f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right), f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)\right) \\
&= \operatorname{Vect}\underbrace{\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}\right)}_{=\mathscr{G}_I}.
\end{aligned}$$

Dès lors, $\mathscr{G}_I$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im}(f)$. Donc en particulier, $\mathscr{B}_I = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$ est une famille de vecteurs de $\operatorname{Im}(f)$ qui est de surcroît libre car les deux vecteurs ne sont pas colinéaires.

Enfin, puisque $\mathrm{Card}\,(\mathscr{B}_I) = 2 = \mathrm{rg}\,(f)$, on en déduit que $\mathscr{B}_I$ est une base de $\mathrm{Im}\,(f)$. Conclusion,

$$\boxed{\mathrm{Ker}\,(f) = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}\right),\quad \dim\left(\mathrm{Ker}\,(f)\right) = 1,\quad \mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\-2\\0\end{bmatrix}\right),\quad \mathrm{rg}\,(f) = 2.}$$

NB : on aurait aussi pu commencer par déterminer l'image puis en déduire par le théorème du rang que $\dim\left(Ker\,(f)\right)$ *et donc un vecteur dans le noyau aurait suffit pour en former une base.*

3. On observe que

$$\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\-2\\0\end{bmatrix}.$$

Donc par la question précédente,

$$\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix} \in \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\-2\\0\end{bmatrix}\right) = \mathrm{Im}\,(f).$$

Or $\mathrm{Im}\,(f)$ est un espace vectoriel contenant $\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$ et $\mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}\right)$ est le plus petit (au sens de l'inclusion) espace vectoriel contenant $\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$. Conclusion, par la question précédente,

$$\boxed{\mathrm{Ker}\,(f) = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}\right) \subseteq \mathrm{Im}\,(f).}$$

Méthode 1, la méthode Rahan (ou presque)

4. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a

$$f^2(x,y,z) = f \circ f\,(x,y,z) = f\left(\begin{bmatrix}-x+z\\3x+y-2z\\x+y\end{bmatrix}\right).$$

Notons, $a = -x+z$, $b = 3x+y-2z$, $c = x+y$. Alors,

$$\begin{aligned}
f^2(x,y,z) = f\left(\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix}-a+c\\3a+b-2c\\a+b\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}x-z+x+y\\-3x+3z+3x+y-2z-2x-2y\\-x+z+3x+y-2z\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}2x+y-z\\-2x-y+z\\2x+y-z\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3,\qquad f\left(\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}2x+y-z\\-2x-y+z\\2x+y-z\end{bmatrix}.}$$

5. Avec la notation de la question 2. on a

$$\operatorname{Im}\left(f^2\right) = \operatorname{Vect}\left(f\left(\mathscr{C}\right)\right) = \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right).$$

On note que $C_1 = 2C_2$ et $C_3 = -C_2$. Ainsi,

$$\operatorname{Im}\left(f^2\right) = \operatorname{Vect}\underbrace{\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)}_{=\mathscr{B}_{I2}}.$$

La famille $\mathscr{B}_{2I}$ est libre car le vecteur est non nul et engendre $\operatorname{Im}\left(f^2\right)$ donc $\mathscr{B}_{2I}$ est une base de $\operatorname{Im}\left(f^2\right)$. Conclusion,

$$\boxed{\operatorname{Im}\left(f^2\right) = \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right).}$$

6. Soit $(u, v) \in \mathscr{L}(E)^2$. Supposons que $u \circ v = 0_{\mathscr{L}(E)}$. Montrons que $\operatorname{Im}(v) \subseteq \operatorname{Ker}(u)$. Soit $y \in \operatorname{Im}(v)$. Alors, il existe $x \in E$ tel que $y = v(x)$. Donc en composant par u (car on veut montrer que $u(y) = 0_E$), on a

$$u(y) = u\left(v(x)\right) = 0_E \qquad \text{car } u \circ v = 0_{\mathscr{L}(E)}.$$

Donc $y \in \operatorname{Ker}(u)$, ceci étant vrai pour y quelconque dans $\operatorname{Im}(v)$, on en déduit que

$$u \circ v = 0_{\mathscr{L}(E)} \qquad \Rightarrow \qquad \operatorname{Im}(v) \subseteq \operatorname{Ker}(u).$$

Réciproquement, supposons que $\operatorname{Im}(v) \subseteq \operatorname{Ker}(u)$. Montrons que $u \circ v = 0_{\mathscr{L}(E)}$. Soit $x \in E$. Posons $y = v(x)$. Alors, $y \in \operatorname{Im}(v)$. Donc par hypothèse, $y \in \operatorname{Ker}(u)$ i.e. $u(y) = 0_E$. Ainsi,

$$0_E = u(y) = u\left(v(x)\right) = u \circ v(x).$$

Ceci étant vrai pour $x \in E$ quelconque. On en déduit bien que $u \circ v = 0_{\mathscr{L}(E)}$. Conclusion,

$$\boxed{u \circ v = 0_{\mathscr{L}(E)} \qquad \Leftrightarrow \qquad \operatorname{Im}(v) \subseteq \operatorname{Ker}(u).}$$

7. On a vu à la question 5. que $\operatorname{Im}\left(f^2\right) = \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$. Or par la question 3. on sait également que $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$. Ainsi,

$$\operatorname{Im}\left(f^2\right) = \operatorname{Ker}(f).$$

En particulier, pour $v = f^2$ et $u = f$, on a $\operatorname{Im}(v) \subseteq \operatorname{Ker}(u)$. Donc par la question précédente, $u \circ v = 0_{\mathscr{L}(E)}$ ou encore $f \circ f^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}$ i.e.

$$\boxed{f^3 = 0_{\mathscr{L}(E)} \text{ donc } f \text{ est nilpotente d'ordre 3.}}$$

Méthode 2, par l'image d'une base, finalement c'est moins basique.
On pose $e_1 = (1, -1, 1)$. On admet l'existence de deux vecteurs $e_2 \in \mathbb{R}^3$ et $e_3 \in \mathbb{R}^3$ tels que $f(e_2) = e_1$ et $f(e_3) = e_2$. On pose $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

8. Montrons que $\mathscr{B}$ est libre. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que
$$\lambda_1\, e_1 + \lambda_2\, e_2 + \lambda_3\, e_3 = 0_{\mathbb{R}^3}.$$
En composant par f, on a
$$f\left(\lambda_1\, e_1 + \lambda_2\, e_2 + \lambda_3\, e_3\right) = f\left(0_{\mathbb{R}^3}\right) \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda_1\, f\left(e_1\right) + \lambda_2\, f\left(e_2\right) + \lambda_3\, f\left(e_3\right) = 0_{\mathbb{R}^3}.$$
On observe que par la question 2. $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \operatorname{Ker}(f)$. Donc $f\left(e_1\right) = 0_{\mathbb{R}^3}$. De plus, $f\left(e_2\right) = e_1$ et $f\left(e_3\right) = e_2$. Ainsi,
$$\lambda_2\, e_1 + \lambda_3\, e_2 = 0_{\mathbb{R}^3}.$$
Puis à nouveau,
$$f\left(\lambda_2\, e_1 + \lambda_3\, e_2\right) = f\left(0_{\mathbb{R}^3}\right) \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda_2\, f\left(e_1\right) + \lambda_3\, f\left(e_2\right) = 0_{\mathbb{R}^3} \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda_3\, e_1 = 0_{\mathbb{R}^3}.$$
Or $e_1 \neq 0_{\mathbb{R}^3}$. Donc $\lambda_3 = 0_{\mathbb{R}}$. Ainsi, par ce qui précède,
$$\lambda_2\, e_1 + \lambda_3\, e_2 = 0_{\mathbb{R}^3} \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda_2\, e_1 = 0_{\mathbb{R}^3} \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda_2 = 0_{\mathbb{R}}.$$
Enfin,
$$\lambda_1\, e_1 + \lambda_2\, e_2 + \lambda_3\, e_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda_1\, e_1 = 0_{\mathbb{R}^3} \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda_1 = 0_{\mathbb{R}}.$$
Donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0_{\mathbb{R}}$. Donc $\mathscr{B}$ est libre. De plus, $\operatorname{Card}(\mathscr{B}) = 3 = \dim\left(\mathbb{R}^3\right)$. Conclusion,
$$\boxed{\mathscr{B} \text{ est une base de } \mathbb{R}^3.}$$

9. Puisque $e_1 \in \operatorname{Ker}(f)$, $f\left(e_2\right) = e_1$ et $f\left(e_3\right) = e_2$, on a
$$f(\mathscr{B}) = \left(f\left(e_1\right), f\left(e_2\right), f\left(e_3\right)\right) = \left(0_{\mathbb{R}^3}, e_1, e_2\right).$$
Puis,
$$f^2(\mathscr{B}) = f\left(0_{\mathbb{R}^3}, e_1, e_2\right) = \left(0_{\mathbb{R}^3}, 0_{\mathbb{R}^3}, e_1\right).$$
Enfin,
$$f^3(\mathscr{B}) = f\left(0_{\mathbb{R}^3}, 0_{\mathbb{R}^3}, e_1\right) = \left(0_{\mathbb{R}^3}, 0_{\mathbb{R}^3}, 0_{\mathbb{R}^3}\right).$$
Conclusion,
$$f^3(\mathscr{B}) = \left(0_{\mathbb{R}^3}, 0_{\mathbb{R}^3}, 0_{\mathbb{R}^3}\right).$$

10. On observe que l'image de $\mathscr{B}$ par f^3 est la même que celle de $\mathscr{B}$ par l'application nulle. Or $\mathscr{B}$ est une base et une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base. Conclusion,
$$\boxed{f^3 = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)} \text{ i.e. } f \text{ est nilpotente d'ordre 3.}}$$

11. Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
f(x,y,z)=e_1 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} -x+z \\ 3x+y-2z \\ x+y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -x+z=1 \\ 3x+y-2z=-1 \\ x+y=1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -x+z=1 \\ y+z=2 \\ y+z=2 \end{cases} \qquad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2+3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3+L_1 \end{matrix} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -x+z=1 \\ y+z=2 \end{cases} \qquad \text{car } L_2=L_3 \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x=z-1 \\ y=2-z \end{cases}
\end{aligned}$$

En particulier, pour $z=0$ par exemple, on obtient que $x=-1$ et $y=2$ et donc que $(-1,2,0)$ est une solution. Conclusion,

$$\boxed{\text{pour } e_2=\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ on a } f(e_2)=e_1.}$$

12. De la même façon, soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, on a

$$\begin{aligned}
f(x,y,z)=e_2 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} -x+z \\ 3x+y-2z \\ x+y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -x+z=-1 \\ 3x+y-2z=2 \\ x+y=0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -x+z=-1 \\ y+z=-1 \\ y+z=-1 \end{cases} \qquad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2+3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3+L_1 \end{matrix} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -x+z=-1 \\ y+z=-1 \end{cases} \qquad \text{car } L_2=L_3 \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x=z+1 \\ y=-1-z \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\text{pour } e_3=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ on a } f(e_3)=e_2.}$$

13. Soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{R}^3$ tel que

$$\lambda_1 e_1+\lambda_2 e_2+\lambda_3 e_3=0_{\mathbb{R}^3}.$$

Par les questions précédentes,

$$0_{\mathbb{R}^3} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 \\ \lambda_1 \end{bmatrix}.$$

Dès lors,

$$\begin{aligned}
\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \end{cases} \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow \frac{L_2 + L_1}{3} \\
&\Leftrightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.
\end{aligned}$$

Donc $\mathscr{B}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$. De plus, $\mathrm{Card}(\mathscr{B}) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$. Conclusion, on retrouve le résultat de la question 8.

$$\boxed{\mathscr{B} \text{ est une base de } \mathbb{R}^3.}$$

Partie 2 : Cas général

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$, $f \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$. On note $n = \dim(E)$ et on suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 2$ tel que $f^p = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

14. Procédons par l'absurde et supposons que $f \in \mathrm{GL}(E)$. Alors, par stabilité de $\mathrm{GL}(E)$ par composition, on en déduit que $f^p \in \mathrm{GL}(E)$. Or $f^p = 0_{\mathscr{L}(E)}$ et cela se saurait si $0_{\mathscr{L}(E)}$ était inversible. Contradiction. Conclusion,

$$\boxed{f \notin \mathrm{GL}(E).}$$

15. Supposons que f soit un projecteur. Alors, $f^2 = f$. Puis par récurrence, $f^k = f$ pour tout $k \geqslant 1$. En particulier, pour $p \geqslant 2$, $f^p = f$. Or $f^p = 0_{\mathscr{L}(E)}$ donc $f = 0_{\mathscr{L}(E)}$. Conclusion,

$$\boxed{\text{le seul projecteur nilpotent est l'application nulle}}$$

ou encore

$$\boxed{\text{aucun endomorphisme nilpotent d'ordre } p \geqslant 2 \text{ n'est un projecteur.}}$$

16. Soit $P = \left\{ k \in \mathbb{N} \mid f^k \neq 0_{\mathscr{L}(E)} \right\}$. Par hypothèse, $f \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$ donc $1 \in P$ et P est non vide.

Montrons que P est majoré par p. Soit $k \geqslant p$. Notons $l = k - p \geqslant 0$. Puisque $f^p = 0_{\mathscr{L}(E)}$, alors,

$$\begin{aligned}
f^k &= f^l \circ f^p \qquad \text{car } l \geqslant 0 \text{ (important)} \\
&= f^l \circ 0_{\mathscr{L}(E)} \\
&= 0_{\mathscr{L}(E)}.
\end{aligned}$$

Donc par définition de P, $k \notin P$. Ainsi, $k \geqslant p \Rightarrow k \notin P$. Par contraposée, $k \in P \Rightarrow k < p$. Conclusion,

$$\boxed{P \text{ est une partie non vide de } \mathbb{N} \text{ et majoré par } p-1 \text{ donc admet nécessairement un maximum.}}$$

On note $m = \max(P) + 1$ et l'on cherche à démontrer que $m \leqslant n$. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on pose $K_i = \mathrm{Ker}\left(f^i\right)$ et $u_i = \dim(K_i)$.

17. Par définition, $K_m = \operatorname{Ker}(f^m)$. Or $m = \max(P) + 1$. Donc $m > \max(P)$. Donc $m \notin P$ et ainsi, $f^m = 0_{\mathscr{L}(E)}$. Conclusion,

$$\boxed{K_m = E.}$$

18. Soit $(i, j) \in \mathbb{N}^2$, $i \leqslant j$. Posons $k = j - i \geqslant 0$. Soit $x \in K_i$, par définition, $f^i(x) = 0_E$. Montrons que $x \in K_j$. Puisque $k \geqslant 0$,

$$f^j(x) = f^k \circ f^i(x) = f^k(0_E) = 0_E.$$

Donc $x \in K_j$. Ceci étant vrai pour $x \in K_i$ quelconque,

$$\boxed{\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2,\ i \leqslant j, \qquad K_i \subseteq K_j.}$$

Par suite, on en déduit directement que

$$u_i = \dim(K_i) \leqslant \dim(K_j) = u_j.$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{la suite } (u_i)_{i\in\mathbb{N}} \text{ est croissante.}}$$

19. Soit $i \in \mathbb{N}^*$. Puisque K_i est un sous-espace vectoriel de E, nécessairement,

$$u_i \leqslant \dim(E) = n.$$

Puisque u_1 est une dimension, naturellement, $u_1 \geqslant 0$. Supposons $u_1 = 0$. Alors $K_1 = \{0_E\}$ i.e. f est injective. Or f est un endomorphisme de E et E est de dimension finie. Par caractérisation des isomorphismes en dimension finie, on en déduit que f est un automorphisme de E : $f \in \mathrm{GL}(E)$. Mais ceci contredit la question 14. Donc $u_1 \geqslant 1$. Puis, par croissance de la suite $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$, on en déduit que pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $u_i \geqslant u_1 \geqslant 1$. Conclusion,

$$\boxed{\forall i \in \mathbb{N}^*, \qquad 1 \leqslant u_i \leqslant n.}$$

20. Procédons par l'absurde. Supposons que pour tout $q \in [\![1; n]\!]$, $u_{q+1} \neq u_q$. Alors par croissance de la suite $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$, on en déduit que pour tout $q \in [\![1; n]\!]$, $u_{q+1} > u_q$. De plus pour tout $i \in \mathbb{N}$, $u_i \in \mathbb{N}$, donc nécessairement, pour tout $q \in [\![1; n]\!]$, $u_{q+1} \geqslant u_q + 1$. Alors, $u_2 \geqslant u_1 + 1 \geqslant 2$, puis $u_3 \geqslant u_2 + 1 \geqslant 2 + 1 = 3$. Par récurrence, on montre que pour tout $q \in [\![1; n+1]\!]$, $u_q \geqslant q$. En particulier pour $q = n + 1$, $u_{n+1} \geqslant n + 1 > n$. Cela contredit le résultat de la question précédente. Conclusion,

$$\boxed{\exists q \in [\![1; n]\!], \qquad u_{q+1} = u_q.}$$

21. On a vu à la question 18. que $K_q \subseteq K_{q+1}$. De plus par la question précédente, $\dim(K_q) = \dim(K_{q+1})$. Donc

$$\boxed{K_{q+1} = K_q.}$$

Soit $i \in \mathbb{N}$. Toujours par la question 18. on a $K_q \subseteq K_{q+i}$. Montrons que $K_{q+i} \subseteq K_q$. Procédons par récurrence. Posons $\mathscr{P}(i)$: « $K_{q+i} \subseteq K_q$ ».

Initialisation. Si $i = 0$, alors le résultat est direct, $\mathscr{P}(0)$ est vrai.

Hérédité. Soit $i \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(i)$ et montrons $\mathscr{P}(i+1)$. Par hypothèse de récurrence, $K_{q+i} \subseteq K_q$. Montrons que $K_{q+i+1} \subseteq K_q$. Soit $x \in K_{q+i+1}$. Par définition,

$$f^{q+i+1}(x) = 0_E.$$

Notons $y = f(x)$. Alors,
$$O_E = f^{q+i}\left(f(x)\right) = f^{q+i}(y).$$

Donc $y \in K_{q+i}$. Par hypothèse de récurrence, $y \in K_q$ donc

$$0_E = f^q(y) = f^q\left(f(x)\right) = f^{q+1}(x).$$

Donc $x \in K_{q+1}$. Or par la question précédente, $K_{q+1} = K_q$ donc $x \in K_q$. Ainsi, on a bien $K_{q+i+1} \subseteq K_q$ et $\mathscr{P}(i+1)$ est vraie.

Conclusion, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(i)$ est vraie et donc pour tout $i \in \mathbb{N}$, $K_{q+i} \subseteq K_q$ et puisque l'inclusion réciproque a déjà été établie, on en conclut

$$\boxed{\forall i \in \mathbb{N}, \qquad K_{q+i} = K_q.}$$

22. On sait que $q \in \mathbb{N}^*$ et par la question 19. que pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $u_i \leqslant n$. Donc $u_q \leqslant n$. De plus, par la question 17. $K_m = E$ et donc $u_m = n$. D'où, $u_q \leqslant u_m$. Or la suite $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est croissante. Donc $q \leqslant m$. Posons $i = m - q \in \mathbb{N}$ i.e. $m = q + i$. Donc par la question précédente, on a bien

$$\boxed{K_m = K_q.}$$

23. Par la question précédente et la question 17. on a $K_q = K_m = E$. Donc pour tout $x \in E$, $x \in K_q$ et donc $f^q(x) = 0_E$. Nécessairement, ceci étant vrai pour tout $x \in E$, on a $f^q = 0_{\mathscr{L}(E)}$. Alors pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a
$$f^{q+i} = f^i \circ f^q = f^i \circ 0_{\mathscr{L}(E)} = 0_{\mathscr{L}(E)}.$$

Donc pour tout $i \in \mathbb{N}$, $q + i \notin P$ ou encore pour tout $k \geqslant q$, $k \notin P$. Donc par contraposée, si $k \in P$ alors $k < q$ i.e. $k \leqslant q - 1$. Donc $q - 1$ est un majorant de P. Par définition de m, on en déduit que

$$m = \max(P) + 1 \leqslant q - 1 + 1 = q.$$

Or on a vu que $q \leqslant n$. Conclusion,
$$\boxed{m \leqslant n.}$$

Tout endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel de dimension finie et nécessairement nilpotent d'un ordre plus petit que la dimension de l'espace. Et quand on pense que certains restent sceptiques devant la beauté élevée des mathématiques...

Exercice II - Dénombrement

En plus de faire du foot à cloche pied comme Lucas, Augustin a décidé de procéder à sa rééducation sportive en faisant un nombre entier de longueurs de piscine chaque dimanche pendant p dimanches. On suppose qu'Augustin est capable de faire entre 1 et n longueurs de piscine par entrainement (bien sûr n est très grand et notamment $n \geqslant p$) et on note x_i le nombre de longueurs effectuées le dimanche numéro $i \in [\![1;p]\!]$ que Louis, son entraineur, note consciencieusement dans son carnet pendant p dimanches successifs.

Partie 1 : Quand Augustin fait un peu ce qu'il veut

1. Pour le premier dimanche on a n longueurs possibles donc n choix pour x_1. On suppose que les dimanches suivants sont indépendants des précédents alors, on a toujours n choix pour le deuxième dimanche, le troisième dimanche etc. Autrement dit on effectue un tirage successif de p éléments avec remise dans un ensemble de cardinal n. D'où

$$\boxed{n \times n \times \cdots \times n = n^p \text{ choix.}}$$

2. On (enfin surtout Louis, quel tyran) interdit de refaire la même longueur. Autrement dit le tirage se fait successivement et sans remise. On obtient alors un arrangement de p nombres (longueurs) parmi n possibles :

$$\boxed{A_n^p \text{ choix.}}$$

3. On commence par choisir parmi les p dimanches, les 3 pendant lesquels Augustin a fait 6 longueurs : $\binom{p}{3}$. Il nous faut alors compléter les $p-3$ autres dimanches par un numéro (nombre de longueurs) dans $[\![1;p]\!]$ mais privé de 6 (car Augustin n'a pas fait 6 longueurs les autres dimanches). Cela revient donc à construire un $p-3$ uplet d'éléments d'un ensemble de cardinal $n-1$: $(n-1)^{p-3}$ choix. Au total :

$$\boxed{\binom{p}{3}(n-1)^{p-3} \text{ choix.}}$$

4. Attention à ne pas commencer à choisir un dimanche pendant lequel Augustin fait 10 longueurs puis de compléter les autres dimanches car rien ne lui interdit de refaire 10 longueurs à un autre moment. Par une telle approche on comptera deux fois par exemple le fait qu'Augustin fasse 10 longueurs les deux premiers dimanches (une première fois en fixant le 10 sur le premier dimanche puis en complétant et une seconde fois en fixant le 10 sur le deuxième dimanche et en complétant). Passons plutôt au complémentaire : comptons le nombre de façon qu'Augustin ne fasse jamais 10 longueurs. Pour qu'Augustin ne fasse jamais 10 longueurs, il suffit de choisir (avec remise) chaque dimanche parmi l'ensemble $[\![1;n]\!] \setminus \{10\}$ et donc dans un ensemble de cardinal $n-1$. On construit alors un p uplet d'éléments d'un ensemble de cardinal $n-1$:

$$(n-1)^p \text{ choix.}$$

Or le nombre de possibilités total est n^p. Conclusion, le nombre de façons d'avoir au moins un dimanche avec 10 longueurs est de

$$\boxed{n^p - (n-1)^p}.$$

Partie 2 : Quand Augustin progresse

Soient E un ensemble possédant p éléments, F un ensemble possédants n autres éléments et $G = E \sqcup F$.

5. Puisque $E \cap F = \emptyset$, on a

$$\text{Card}(G) = \text{Card}(E \sqcup F) = \text{Card}(E) + \text{Card}(F) = p + n.$$

Pour construire une partie de G à p éléments, il suffit de prendre simultanément p éléments parmi les $n+p$ possibles : il s'agit d'une combinaison de p éléments parmi $n+p$:

$$\boxed{\binom{n+p}{p} \text{ choix.}}$$

6. On commence par prendre q éléments parmi les p possibles de E : $\binom{p}{q}$ choix. Puis pour terminer de construire une partie de G avec p éléments, il nous faut prendre $p-q$ autres éléments. Or ces éléments n'étant pas dans E sont nécessairement dans F. On prend donc $p-q$ éléments parmi les n possibles de F : $\binom{n}{p-q}$ choix. Au total donc
$$\boxed{\binom{p}{q}\binom{n}{p-q} \text{ choix.}}$$

7. Notons $\mathscr{P}$ l'ensemble des parties de G ayant p éléments. Chacune de ses parties possède 0 ou 1 ou 2, ... ou p éléments dans F. Notons $\mathscr{P}_q$ l'ensemble des parties de G ayant exactement q éléments dans F. Alors, on observe que
$$\mathscr{P} = \bigsqcup_{q \in [\![0;p]\!]} \mathscr{P}_q.$$
Dès lors,
$$\mathrm{Card}\,(\mathscr{P}) = \sum_{q=0}^{p} \mathrm{Card}\,(\mathscr{P}_q)\,.$$
Par la question 5. $\mathrm{Card}\,(\mathscr{P}) = \binom{n+p}{p}$ et par la question 6. $\mathrm{Card}\,(\mathscr{P}_q) = \binom{p}{q}\binom{n}{p-q}$. Ainsi, on obtient la formule de Vandermonde :
$$\boxed{\sum_{q=0}^{p} \binom{p}{q}\binom{n}{p-q} = \binom{n+p}{p}.}$$

8. On cherche à déterminer les p uplets $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ tels que $x_1 < x_2 < \cdots < x_p$. On constate astucieusement que cela revient à trouver un p-uplet sans répétition (les x_i tous distincts) et de les ordonner. On choisit donc simultanément p éléments parmi les n possibles : $\binom{n}{p}$, puis on range ces éléments dans l'ordre croissante : une seule façon de tous les ranger dans l'ordre croissant. Au total :
$$\boxed{\binom{n}{p} \text{ possibilités.}}$$

9. On suppose que chaque dimanche Augustin égalise ou augmente strictement son score du dimanche précédent : pour tout $k \in [\![1; n-1]\!]$, $x_{k+1} \geqslant x_k$.

   (a) Soit $q \in [\![0;p]\!]$. On commence par choisir les q dimanches où Augustin ne progresse pas (c'est un modèle, tout le monde sait qu'en vrai Augustin se surpasse systématiquement). On choisit donc q dimanche parmi p : $\binom{p}{q}$ choix. Pour chacun de ces dimanches, on aura $x_{k+1} = x_k$ et donc lorsque x_k est choisit, le x_{k+1} sera automatiquement fixé. On ne choisit donc pas de longueur pour ces dimanches. Il nous faut cependant choisir les longueurs pour lesquels Augustin progresse strictement. Il nous reste $p-q$ dimanches où Augustin progresse strictement. En reproduisant le raisonnement de la question précédente en remplaçant p par $p-q$, on obtient $\binom{n}{p-q}$ possibilités. Donc au total :
   $$\boxed{\binom{p}{q}\binom{n}{p-q} \text{ possibilités.}}$$

(b) Notons N_q le nombre de façons qu'Augustin a d'égaliser son score q dimanche et de progresser strictement les $p-q$ autres dimanches et N le nombre total de résultats possibles lorsqu'Augustin égalise ou augmente strictement son score chaque dimanche. On observe que $N = \sum_{q=0}^{p} N_q$. Alors, par la question précédente,

$$N = \sum_{q=0}^{p} \binom{p}{q}\binom{n}{p-q}.$$

Donc par la formule de Vandermonde, on conclut que

$$\boxed{N = \binom{n+p}{p}.}$$

Exercice III - Probabilités

Partie 1 : Mise en place de la chaîne

On modélise le comportement d'un étudiant de PTSI par la chaîne de Markov suivante.

- On suppose qu'à chaque étape, l'étudiant se trouve dans l'un des états suivants : il dort ou il mange ou il travaille (ça lui arrive). On note X_k la variable aléatoire décrivant l'état de l'étudiant à l'étape k : $X_k = 1$ lorsque l'étudiant dort (état primaire), $X_k = 2$ lorsque l'étudiant mange (cela le met dans un état second de manger) et $X_k = 3$ lorsque l'étudiant travaille (état suprême).
- Lorsque l'étudiant dort à l'étape k, il a une chance sur deux de se réveiller et une chance sur deux de continuer à roupiller (le paresseux) à l'étape $k+1$. S'il se réveille il choisit équitablement entre prendre un petit déjeuner ou directement aller travailler (une illumination soudaine) à l'étape $k+1$.
- Lorsque l'étudiant mange à l'étape k, il choisit équitablement ou d'aller faire la sieste pour digérer (ça fatigue de manger) ou d'aller travailler (on ne va peut-être pas se recoucher après le petit déjeuner) à l'étape $k+1$.
- Lorsque l'étudiant travaille à l'étape k, il choisit équitablement ou d'aller dormir ou d'aller manger (on ne va pas non plus travailler deux étapes à la suite).

1. Soit $k \in \mathbb{N}$. Soit $j \in [\![1;3]\!]$. La famille $(X_k = i)_{i\in[\![1;3]\!]}$ forme un système complet d'évènements (incompatibles). Donc par la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}\left(X_{k+1} = j\right) = \sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}\left(X_{k+1} = j \mid X_k = i\right) \mathbb{P}\left(X_k = i\right).$$

Or si l'étudiant dort à l'étape k, $X_k = 1$, il a une chance sur deux de continuer à dormir :

$$\mathbb{P}\left(X_{k+1} = 1 \mid X_k = 1\right) = \frac{1}{2}.$$

S'il dort, il a une chance sur deux de se réveiller puis encore une chance sur deux d'aller manger. Donc $\mathbb{P}\left(X_{k+1} = 2 \mid X_k = 1\right) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. De même s'il dort, il a une chance sur quatre de se mettre à travailler : $\mathbb{P}\left(X_{k+1} = 3 \mid X_k = 1\right) = \frac{1}{4}$.

Si maintenant l'étudiant mange à l'étape k, $X_k = 2$, il n'a aucune chance de continuer à manger : $\mathbb{P}\left(X_{k+1} = 2 \mid X_k = 2\right) = 0$, il a une chance sur deux d'aller dormir : $\mathbb{P}\left(X_{k+1} = 1 \mid X_k = 2\right) = \frac{1}{2}$ et une chance sur deux d'aller travailler : $\mathbb{P}\left(X_{k+1} = 3 \mid X_k = 2\right) = \frac{1}{2}$.

Enfin, si l'étudiant travaille à l'étape k, $X_k = 3$, il a une chance sur deux d'aller dormir :

$$\mathbb{P}\left(X_{k+1} = 1 \mid X_k = 2\right) = \frac{1}{2},$$

une chance sur deux d'aller manger : $\mathbb{P}\left(X_{k+1} = 2 \mid X_k = 3\right) = \frac{1}{2}$ et aucune chance de continuer à travailler : $\mathbb{P}\left(X_{k+1} = 3 \mid X_k = 3\right) = 0$.

Pour résumer, on obtient :

$$\begin{array}{lll}
\mathbb{P}\left(X_{k+1} = 1 \mid X_k = 1\right) = \frac{1}{2}, & \mathbb{P}\left(X_{k+1} = 2 \mid X_k = 1\right) = \frac{1}{4}, & \mathbb{P}\left(X_{k+1} = 3 \mid X_k = 1\right) = \frac{1}{4} \\
\mathbb{P}\left(X_{k+1} = 1 \mid X_k = 2\right) = \frac{1}{2}, & \mathbb{P}\left(X_{k+1} = 2 \mid X_k = 2\right) = 0, & \mathbb{P}\left(X_{k+1} = 3 \mid X_k = 2\right) = \frac{1}{2} \\
\mathbb{P}\left(X_{k+1} = 1 \mid X_k = 3\right) = \frac{1}{2}, & \mathbb{P}\left(X_{k+1} = 2 \mid X_k = 3\right) = \frac{1}{2}, & \mathbb{P}\left(X_{k+1} = 3 \mid X_k = 3\right) = 0.
\end{array}$$

Conclusion, on obtient :

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{k+1}=1)&=\frac{\mathbb{P}(X_k=1)+\mathbb{P}(X_k=2)+\mathbb{P}(X_k=3)}{2}\\ \mathbb{P}(X_{k+1}=2)&=\frac{\mathbb{P}(X_k=1)+2\mathbb{P}(X_k=3)}{4}\\ \mathbb{P}(X_{k+1}=3)&=\frac{\mathbb{P}(X_k=1)+2\mathbb{P}(X_k=2)}{4}.\end{aligned}}$$

2. On suppose dans cette question que $X_0 \sim \mathscr{U}(\llbracket 1;3\rrbracket)$. Dès lors, pour tout $i \in \llbracket 1;3\rrbracket$, $\mathbb{P}(X_0=i)=\frac{1}{3}$. Donc par la question précédente,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1=1)&=\frac{\mathbb{P}(X_0=1)+\mathbb{P}(X_0=2)+\mathbb{P}(X_0=3)}{2}=\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}{2}=\frac{1}{2}\\ \mathbb{P}(X_1=2)&=\frac{\mathbb{P}(X_0=1)+2\mathbb{P}(X_0=3)}{4}=\frac{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}{4}=\frac{1}{4}\\ \mathbb{P}(X_1=3)&=\frac{\mathbb{P}(X_0=1)+2\mathbb{P}(X_0=2)}{4}=\frac{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}{4}=\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Conclusion,

j	1	2	3
$\mathbb{P}(X_1=j)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

On vérifie bien que $\displaystyle\sum_{j=1}^{3}\mathbb{P}(X_1=j)=1$.

On suppose dans toute la suite qu'à l'instant initial l'étudiant mange (cela ne surprendra personne, bande de goinfres) i.e. $X_0=2$.

3. Puisque $X_0=2$, on a $\mathbb{P}(X_0=1)=\mathbb{P}(X_0=3)=0$ et $\mathbb{P}(X_0=2)=1$. Donc par la question 1.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1=1)&=\frac{\mathbb{P}(X_0=1)+\mathbb{P}(X_0=2)+\mathbb{P}(X_0=3)}{2}=\frac{0+1+0}{2}=\frac{1}{2}\\ \mathbb{P}(X_1=2)&=\frac{\mathbb{P}(X_0=1)+2\mathbb{P}(X_0=3)}{4}=\frac{0+0}{4}=0\\ \mathbb{P}(X_1=3)&=\frac{\mathbb{P}(X_0=1)+2\mathbb{P}(X_0=2)}{4}=\frac{0+2}{4}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

L'univers image de X_1 est donc $\{1;3\}$. Donc l'univers image de Y_1 est $\left\{\frac{1-1}{3};\frac{3-1}{2}\right\}=\{0;1\}$. De plus,

$$\mathbb{P}(Y_1=0)=\mathbb{P}\left(\frac{X_1-1}{2}=0\right)=\mathbb{P}(X_1=1)=\frac{1}{2}.$$

De même,

$$\mathbb{P}(Y_1=1)=\mathbb{P}\left(\frac{X_1-1}{2}=1\right)=\mathbb{P}(X_1=3)=\frac{1}{2}.$$

Conclusion, on reconnaît une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$ (ou une loi uniforme sur $\{0;1\}$) :

$$\boxed{Y_1\sim\mathscr{B}\left(\frac{1}{2}\right).}$$

4. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Notons H l'évènement : l'étudiant hiberne entre les instants 1 et n. Une hibernation étant un sommeil ininterrompu entre les étapes 1 et n, on cherche $H=(X_1=1)\cap(X_2=1)\cap\cdots\cap(X_n=1)$. Pour tout $k\in\llbracket 1;n\rrbracket$, notons

$$H_k=(X_1=1)\cap(X_2=1)\cap\cdots\cap(X_k=1).$$

Pas d'indépendance naturellement entre ces évènements. Par la formule des probabilités composées, on a

$$\mathbb{P}(H) = \mathbb{P}(H_n) = \mathbb{P}(X_n = 1 \mid H_{n-1})\,\mathbb{P}(X_{n-1} = 1 \mid H_{n-2})\dots\mathbb{P}(X_2 = 1 \mid X_1 = 1)\,\mathbb{P}(X_1 = 1).$$

Soit $k \in [\![1; n-1]\!]$. L'évènement $(X_{k+1} = 1 \mid H_k)$ est l'évènement l'étudiant dort encore à l'étape $k+1$ sachant qu'il a dormi toutes les étapes précédentes entre 1 et k. Mais l'état de l'étudiant à l'étape $k+1$ ne dépend que de son état à l'étape k et donc $(X_{k+1} = 1 \mid H_k) = (X_{k+1} = 1 \mid X_k = 1)$. Or par la question 1., $\mathbb{P}(X_{k+1} = 1 \mid X_k = 1) = \frac{1}{2}$. Ainsi,

$$\mathbb{P}(H) = \left[\prod_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(X_{k+1} = 1 \mid H_k)\right]\mathbb{P}(X_1 = 1) = \left[\prod_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2}\right]\mathbb{P}(X_1 = 1) = \frac{1}{2^{n-1}}\mathbb{P}(X_1 = 1).$$

Or par la question précédente, on a aussi $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \frac{1}{2}$. Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{P}(H) = \frac{1}{2^{n-1}}\frac{1}{2} = \frac{1}{2^n}.}$$

Moralité, $\mathbb{P}(H)$ tend très vite vers 0 lorsque n augmente : les étudiants qui hibernent longtemps sont finalement assez rares (c'est un modèle naturellement...)

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $U_k = \begin{bmatrix} \mathbb{P}(X_k = 1) \\ \mathbb{P}(X_k = 2) \\ \mathbb{P}(X_k = 3) \end{bmatrix}$ et $A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

5. Soit $k \in \mathbb{N}$. Par la question 1. on a

$$\begin{aligned} U_{k+1} = \begin{bmatrix} \mathbb{P}(X_{k+1} = 1) \\ \mathbb{P}(X_{k+1} = 2) \\ \mathbb{P}(X_{k+1} = 3) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\mathbb{P}(X_k=1)+\mathbb{P}(X_k=2)+\mathbb{P}(X_k=3)}{2} \\ \frac{\mathbb{P}(X_k=1)+2\mathbb{P}(X_k=3)}{4} \\ \frac{\mathbb{P}(X_k=1)+2\mathbb{P}(X_k=2)}{4} \end{bmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{P}(X_k = 1) \\ \mathbb{P}(X_k = 2) \\ \mathbb{P}(X_k = 3) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} U_k. \end{aligned}$$

Conclusion, on a bien

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \qquad U_{k+1} = AU_k.}$$

6. Par la question précédente, on a

$$U_2 = AU_1.$$

Or par la question 3. $U_1 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Donc

$$U_2 = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

De même, on a

$$U_4 = AU_3 = A^2U_2.$$

On a
$$A^2 = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 8 & 8 & 8 \\ 4 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$
Par suite
$$U_4 = A^2 U_2 = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\frac{1}{8}\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{64}\begin{bmatrix} 4\,(4+3+1) \\ 8+9+1 \\ 8+3+3 \end{bmatrix} = \frac{1}{64}\begin{bmatrix} 4\times 8 \\ 18 \\ 14 \end{bmatrix} = \frac{1}{32}\begin{bmatrix} 16 \\ 9 \\ 7 \end{bmatrix}.$$
Conclusion,
$$\boxed{U_2 = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad U_4 = \frac{1}{32}\begin{bmatrix} 16 \\ 9 \\ 7 \end{bmatrix}.}$$

7. On cherche $\mathbb{P}\,(X_2 = 3 \mid X_4 = 1)$. Par la formule de Bayes, *(il faut renverser le temps pour le remettre dans le bon sens)*, puisque $(X_2 = 3)$ et $(X_4 = 1)$ ne sont pas négligeables, on a
$$\mathbb{P}\,(X_2 = 3 \mid X_4 = 1) = \frac{\mathbb{P}\,(X_4 = 1 \mid X_2 = 3)\,\mathbb{P}\,(X_2 = 3)}{\mathbb{P}\,(X_4 = 1)} = \frac{\mathbb{P}\,((X_4 = 1) \cap (X_2 = 3))}{\mathbb{P}\,(X_4 = 1)}.$$
Puisque $(X_3 = i)_{i \in [\![1;3]\!]}$ forme un système complet d'évènements (incompatibles), par la formule des probabilités totales :
$$\mathbb{P}\,((X_4 = 1) \cap (X_2 = 3)) = \sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}\,((X_4 = 1) \cap (X_3 = i) \cap (X_2 = 3)).$$
Puis, par la formule des probabilités composées :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}\,((X_4 = 1) \cap (X_3 = i) \cap (X_2 = 3)) &= \sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}\,(X_4 = 1 \mid (X_3 = i) \cap (X_2 = 3)) \\ &\qquad \mathbb{P}\,(X_3 = i \mid X_2 = 3)\,\mathbb{P}\,(X_2 = 3) \\ &= \sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}\,(X_4 = 1 \mid X_3 = i)\,\mathbb{P}\,(X_3 = i \mid X_2 = 3)\,\mathbb{P}\,(X_2 = 3),\end{aligned}$$
car le comportement à l'étape 4 ne dépend que de l'étape 3 lorsque l'on connaît celle-là. Par la question 1.
$$\begin{aligned}\mathbb{P}\,((X_4 = 1) \cap (X_2 = 3)) &= \mathbb{P}\,(X_4 = 1 \mid X_3 = 1)\,\mathbb{P}\,(X_3 = 1 \mid X_2 = 3)\,\mathbb{P}\,(X_2 = 3) \\ &\quad + \mathbb{P}\,(X_4 = 1 \mid X_3 = 2)\,\mathbb{P}\,(X_3 = 2 \mid X_2 = 3)\,\mathbb{P}\,(X_2 = 3) \\ &\quad + \mathbb{P}\,(X_4 = 1 \mid X_3 = 3)\,\mathbb{P}\,(X_3 = 3 \mid X_2 = 3)\,\mathbb{P}\,(X_2 = 3) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\mathbb{P}\,(X_2 = 3) + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\mathbb{P}\,(X_2 = 3) + \frac{1}{2} \times 0\mathbb{P}\,(X_2 = 3) \\ &= \frac{\mathbb{P}\,(X_2 = 3)}{2}.\end{aligned}$$
D'où
$$\mathbb{P}\,(X_2 = 3 \mid X_4 = 1) = \frac{\frac{\mathbb{P}(X_2 = 3)}{2}}{\mathbb{P}\,(X_4 = 1)}.$$
D'autre part, par la question précédente
$$U_2 = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad U_4 = \frac{1}{32}\begin{bmatrix} 16 \\ 9 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

En particulier, $\mathbb{P}(X_2 = 3) = \frac{1}{8}$. et $\mathbb{P}(X_4 = 1) = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$. Finalement,

$$\mathbb{P}(X_2 = 3 \mid X_4 = 1) = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{8}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{P}(X_2 = 3 \mid X_4 = 1) = \frac{1}{8}.}$$

Partie 2 : L'algèbre linéaire est partout

Soit

$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} & \mapsto & \begin{bmatrix} \frac{x+y+z}{2} \\ \frac{x+y+z}{4} \\ \frac{x+y+z}{4} \end{bmatrix} \end{array}$$

8. Montrons que f_1 est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\left(u = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}\right) \in \left(\mathbb{R}^3\right)^2$.

   On a

$$\begin{aligned} f_1(\lambda u + \mu v) &= f_1\left(\begin{bmatrix} \lambda x + \mu x' \\ \lambda y + \mu y' \\ \lambda z + \mu z' \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\lambda x + \mu x' + \lambda y + \mu y' + \lambda z + \mu z'}{2} \\ \frac{\lambda x + \mu x' + \lambda y + \mu y' + \lambda z + \mu z'}{4} \\ \frac{\lambda x + \mu x' + \lambda y + \mu y' + \lambda z + \mu z'}{4} \end{bmatrix} \\ &= \lambda \begin{bmatrix} \frac{x+y+z}{2} \\ \frac{x+y+z}{4} \\ \frac{x+y+z}{4} \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} \frac{x'+y'+z'}{2} \\ \frac{x'+y'+z'}{4} \\ \frac{x'+y'+z'}{4} \end{bmatrix} \\ &= \lambda f_1(u) + \mu f_1(v). \end{aligned}$$

   Donc f_1 est linéaire. De plus f_1 va bien de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$. Donc $f_1 \in \mathscr{L}(E)$. Montrons que $f_1 \circ f_1$. Soit $u = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$. On a

$$\begin{aligned} f_1 \circ f_1(u) = f_1 \circ f_1\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) &= f_1\left(\begin{bmatrix} \frac{x+y+z}{2} \\ \frac{x+y+z}{4} \\ \frac{x+y+z}{4} \end{bmatrix}\right) \\ &= f_1\left(\frac{x+y+z}{4}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \\ &= \frac{x+y+z}{4} f_1\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) && \text{par linéarité de } f_1 \\ &= \frac{x+y+z}{4}\begin{bmatrix} \frac{2+1+1}{2} \\ \frac{2+1+1}{4} \\ \frac{2+1+1}{4} \end{bmatrix} \\ &= \frac{x+y+z}{4}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x+y+z}{2} \\ \frac{x+y+z}{4} \\ \frac{x+y+z}{4} \end{bmatrix} = f_1(u). \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $u \in \mathbb{R}^3$, on en déduit que $f_1 \circ f_1 = f_1$. Donc f_1 est un projecteur. Déterminer $\mathrm{Im}\,(f_1)$. Soit $u = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$. On a

$$f_1\,(u) = \frac{x+y+z}{4} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

Donc $\mathrm{Im}\,(f_1) \subseteq \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$. De plus, en prenant $u_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, on a $f_1(u_0) = u_0$. Donc $u_0 \in \mathrm{Im}\,(f_1)$ et par suite $\mathrm{Vect}\,(u_0) \subseteq \mathrm{Im}\,(f_1)$. Ainsi,

$$\mathrm{Im}\,(f_1) = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

Enfin, déterminer $\mathrm{Ker}\,(f_1)$ (de dimension 2 par le théorème du rang). Soit $u = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} u \in \mathrm{Ker}\,(f_1) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{x+y+z}{4} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0_{\mathbb{R}^3} \\ &\Leftrightarrow \quad x+y+z = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad z = -x-y \\ &\Leftrightarrow \quad u = \begin{bmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Donc

$$\mathrm{Ker}\,(f_1) = \left\{ x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \mathrm{Vect} \underbrace{\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right)}_{=\mathscr{B}_K}.$$

La famille $\mathscr{B}_K$ est libre car les deux vecteurs ne sont pas colinéaires et engendre $\mathrm{Ker}\,(f_1)$ donc est une base de $\mathrm{Ker}\,(f_1)$. Conclusion,

$$\boxed{f_1 \text{ est un projecteur sur } \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \text{ parallèlement à } \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right).}$$

On pose également $e_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $e_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$,

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ X & \mapsto & AX \end{array}, \qquad f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} & \mapsto & \frac{y-z}{2} e_2 \end{array}, \qquad f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} & \mapsto & \frac{-x+y+z}{4} e_3 \end{array}$$

On admet que f, f_2, f_3 sont des endomorphismes.

9. Soit $X=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. On a

$$\begin{aligned}
(f_1+f_2+f_3)(X) &= f_1(X)+f_2(X)+f_3(X)\\
&= \frac{x+y+z}{4}e_1+\frac{y-z}{2}e_2+\frac{-x+y+z}{4}e_3\\
&= \frac{x+y+z}{4}\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}+\frac{y-z}{2}\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}+\frac{-x+y+z}{4}\begin{bmatrix}-2\\1\\1\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}\frac{x+y+z}{2}-\frac{-x+y+z}{2}\\ \frac{x+y+z}{4}+\frac{2y-2z}{4}+\frac{-x+y+z}{4}\\ \frac{x+y+z}{4}-\frac{2y-2z}{4}\frac{-x+y+z}{4}\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=X.
\end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $X\in\mathbb{R}^3$, on en déduit que $f_1+f_2+f_3=\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$. Puis, on a

$$\begin{aligned}
f\circ f_1(X)=f\left(\frac{x+y+z}{4}e_1\right)=\frac{x+y+z}{4}Ae_1 &= \frac{x+y+z}{4}\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2&2&2\\1&0&2\\1&2&0\end{pmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}\\
&= \frac{x+y+z}{16}\begin{bmatrix}8\\4\\4\end{bmatrix}\\
&= \frac{x+y+z}{4}\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}\\
&= f_1(X).
\end{aligned}$$

Donc $f\circ f_1=f_1$. De même,

$$\begin{aligned}
f\circ f_2(X)=f\left(\frac{y-z}{2}e_2\right)=\frac{y-z}{2}Ae_2 &= \frac{y-z}{2}\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2&2&2\\1&0&2\\1&2&0\end{pmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}\\
&= \frac{y-z}{8}\begin{bmatrix}0\\-2\\2\end{bmatrix}\\
&= -\frac{y-z}{4}\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}\\
&= -\frac{1}{2}f_2(X).
\end{aligned}$$

Donc $f\circ f_1=-\frac{1}{2}f_2$. Enfin,

$$\begin{aligned}
f\circ f_3(X)=f\left(\frac{-x+y+z}{4}e_3\right)=\frac{-x+y+z}{4}Ae_3 &= \frac{-x+y+z}{4}\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2&2&2\\1&0&2\\1&2&0\end{pmatrix}\begin{bmatrix}-2\\1\\1\end{bmatrix}\\
&= \frac{-x+y+z}{16}\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}=0_{\mathbb{R}^3}.
\end{aligned}$$

Donc $f\circ f_3=0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$. Conclusion,

$$\boxed{f_1+f_2+f_3=\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3},\qquad f\circ f_1=f_1,\qquad f\circ f_2=-\frac{1}{2}f_2,\qquad f\circ f_3=0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}.}$$

10. Par la question précédente, on a

$$f = f \circ \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} = f \circ (f_1 + f_2 + f_3) = f \circ f_1 + f \circ f_2 + f \circ f_3 = f_1 - \frac{1}{2} f_2.$$

Donc

$$f^2 = f \circ f = f \circ \left(f_1 - \frac{1}{2} f_2 \right) = f \circ f_1 - \frac{1}{2} f \circ f_2 = f_1 + \frac{1}{4} f_2.$$

Montrons par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f^k = f_1 + \frac{(-1)^k}{2^k} f_2$. Posons pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(k)$: « $f^k = f_1 + \frac{(-1)^k}{2^k} f_2$ ».

Initialisation. si $k = 1$, par ce qui précède, $f = f_1 - \frac{1}{2} f_2$ et donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $f \in \mathbb{N}^*$. Montrons que $\mathscr{P}(k) \Rightarrow \mathscr{P}(k+1)$. Supposons que $\mathscr{P}(k)$ est vraie i.e. $f^k = f_1 + \frac{(-1)^k}{2^k} f_2$. Montrons $\mathscr{P}(k+1)$. Par hypothèse de récurrence, $f^k = f_1 + \frac{(-1)^k}{2^k} f_2$. En composant par f :

$$f^{k+1} = f \circ f^k = f \circ \left(f_1 + \frac{(-1)^k}{2^k} f_2 \right) = f \circ f_1 + \frac{(-1)^k}{2^k} f \circ f_2.$$

Par la question précédente,

$$f^{k+1} = f_1 - \frac{(-1)^k}{2^k} \frac{1}{2} f_2 = f_1 + \frac{(-1)^{k+1}}{2^{k+1}} f_2.$$

Donc $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.

Conclusion, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(k)$ est vraie :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad f^k = f_1 + \frac{(-1)^k}{2^k} f_2.}$$

11. On a par la question 5. et une récurrence, on a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$U_k = A^k U_0 = f^k (U_0).$$

Donc par la question précédente,

$$U_k = f_1 (U_0) + \frac{(-1)^k}{2^k} f_2 (U_0).$$

Or $U_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Donc

$$U_k = \frac{0+1+0}{4} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{(-1)^k}{2^k} \frac{1-0}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} + \frac{(-1)^k}{2^{k+1}} \\ \frac{1}{4} + \frac{(-1)^{k+1}}{2^{k+1}} \end{bmatrix}.$$

Conclusion,

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad U_k = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} + \frac{(-1)^k}{2^{k+1}} \\ \frac{1}{4} + \frac{(-1)^{k+1}}{2^{k+1}} \end{bmatrix}.$$

Ce qui nous donne la loi de X_k pour n'importe quel k, alors cha ch'est drôlement fort !!!

Vérification ! Si $k = 1$, on obtient $U_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{2^2} \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, *ça marche !*

Si $k = 2$, on obtient $U_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{2^3} \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{2^3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 3/8 \\ 1/8 \end{bmatrix}$, *ça marche !*

12. Par la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité que l'étudiant travaille à l'étape n est de

$$\mathbb{P}\left(X_n = 3\right) = \frac{1}{4} + \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}.$$

Or $\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ en tant que suite géométrique de raison $q = \frac{-1}{2} \in \left]-1; 1\right[$. Donc

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(X_n = 3\right) = \frac{1}{4}.$$

Donc asymptotiquement,

$$\boxed{\text{l'étudiant a une chance sur 4 d'être en train de travailler à l'étape } n.}$$