Commentaires du Concours Blanc A
Variables aléatoire, représentation matricielle

Problème I - Probabilités

Partie 1 : Questions de cours (ou presque)

Une première partie souvent bien réussie qui montre que le travail de base d'apprentissage du cours est fait consciencieusement.

1. Des problèmes sur le paramètre de la loi uniforme des réponses de la forme $\mathscr{U}(N)$ ou $\mathscr{U}\left(\frac{1}{N}\right)$ sont fausses. Puisque le résultat est direct, il faut le rédiger a minima par une phrase ou deux.
2. Bien. Des confusions souvent entre n et N. 0,5 point sur le fait de citer les formules König-Huygens et théorème de transfert pour la variance.
3. N'hésitez pas à citer la linéarité de l'espérance mais surtout la justification de l'indépendance pour le calcul de la variance était nécessaire. Beaucoup de bonnes réponses, pour les autres, à savoir faire obligatoirement.
4. Vous êtes nombreux à reconnaître la formule de Bienaymé-Tchebychev mais tous ne réussissent pas à l'appliquer correctement. N'oubliez pas l'interprétation demandée (dans laquelle il ne faut pas confondre S_n et $\frac{S_n}{n}$.)

Partie 2 : Probabilités conditionnelles

Une partie beaucoup moins réussie. Tous vous arnaquez en question 6 puis sous-estimez ou passez la question 7 cruciale dans ce problème.

5. Le résultat étant rapide il faut là aussi le rédiger un tout petit peu.
6. Beaucoup, beaucoup d'arnaques et de forçages. Parler de $M_n = i$ à l'extérieur du calcul de probabilité en ayant viré gratuitement le conditionnement démontre une mauvaise compréhension de ce qu'est une probabilité conditionnelle. Le calcul se faisait en trois étapes. 1) on invoque la question précédente, 2) on remplace M_n par i grâce au conditionnement et seulement ensuite 3) on enlève le conditionnement grâce à un argument d'indépendance (à proprement rédiger).
7. Question centrale du sujet. Une poignée d'entre vous obtiennent le bon résultat mais pas beaucoup, et encore moins le justifient proprement. A bien reprendre.
8. Plus facile et mieux résolue. Un arbre ne suffit pas et un parachutage du résultat de la probabilité était aussi sanctionné. Notamment l'indépendance devait être avancée.

Partie 3 : Lois des premiers maximums

Une partie décevante également. N'ayant pas réussi celle d'avant, beaucoup de bricolage mêlé à des fragilités sur des notions pourtant classiques comme les lois conjointes, marginales, l'indépendance, la covariance.

9. Puisque la matrice donnait les coefficients il fallait très proprement justifier leur apparition. Beaucoup d'entre vous se contentent de dire « oui oui tout va bien ça marche » sans rien démontrer. La récurrence était ici une mauvaise idée. Il était attendu d'une part d'invoquer la formule des probabilités totales et d'autre part le résultat de la question 7... La question n'est pas du tout exotique.

10. Mieux. Justifiez votre valeur de X_1 cependant.

11. On pouvait calculer $\mathbb{V}(M_2') = \mathbb{V}(M_2)$, mais réécrire la loi de M_2' en remarquant que $M_2'(\Omega) = [\![-1;2]\!]$ simplifiait les calculs. Cf corrigé.

12. Parfois sue, souvent mal justifiée. Citez proprement les questions que vous utilisez !

13. Quelques bonnes réponses mais trop peu.

14. Vérifiez la cohérence de votre résultat avec la question 10 ! Le calcul des lois marginales est pratiquement du cours, sa justification par la formule des probabilités totales aussi !

15. Ok globalement. J'ai accordé les deux points parfois même si vous vous appuyez sur des résultats précédents faux.

16. Un peu de calcul (mais pas tant que ça si vous avez compris l'astuce de la question 11). Attention à ne pas se jeter uniquement dans les calculs mais à bien justifier en amont que vous utilisez le théorème de transfert ainsi que les résultats de la question 13.

Partie 4 : Loi du n-ième maximum

Une partie bien investie par plusieurs et délaissées par d'autres.

17. Similaire à la question 8, bien suivre la consigne en écrivant proprement l'évènement $(M_n \leqslant k)$ comme une intersection PUIS on calcule sa probabilité en invoquant encore de l'indépendance.

18. Plusieurs ont bien vu le découpage de l'évènement $(M_n = k)$. Question généreusement dotée pour ceux qui voyaient ce découpage.

19. Aïe la somme télescopique ne semble pas évidente pour tout le monde... Dommage !

20. Non résolue par personne. Dès que l'on sort des questions classiques cela vous déstabilise. A retravailler.

Partie 5 : Diagonalisation

Plusieurs se sont grassement servi dans cette partie d'algèbre sans piège. D'autres ont moins eu le temps de l'aborder.

21. Puisque la matrice est donnée il ne suffit pas de la réécrire pour répondre à la question ! ! ! Faites proprement les calculs de $f(1)$, $f(X)$ etc avant de donner la matrice. Certains parlent même de $\mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(f(1))$, $\mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(f(X))$ c'est encore plus joli.

22. Vous voyez bien qu'il suffit de passer par l'inversibilité de B mais attention à le rédiger. Dire B à 4 pivots donc f est bijective ne suffit pas.

23. On pouvait dire que $B - 4I_4$ était échelonnée en effet, n'hésitez pas à spécifier dans ce cas qu'elle l'est en colonne. Certains parlent à bon escient de la transposée.

24. Facile, généralement bien réussie mais pas pour tout le monde.

25. R.A.S.

26. Question centrale dans ce problème. Majoritairement réussie mais beaucoup trop oublient de vérifier que $\mathscr{B}$ est une base. Aucun calcul ici, il suffisait de s'appuyer sur les questions 24 et 25.

27. Pas mal d'entre vous ont compris comment faire mais tous ne vont pas jusqu'au bout du calcul.

28. Non traitée.