Epreuve de Mathématiques

Durée 2 h 30

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Problème - Formule de Stirling et application

L'objectif de ce problème est d'établir un équivalent de $n!$, puis d'en proposer une application pratique :

> Le mathématicien écossais James Stirling a établi en 1730 un équivalent de $n!$, désormais connu sous le nom de formule de Stirling :
>
> $$n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$$

Partie 1 - Une première formule

On considère les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies respectivement par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{n^n\sqrt{n}}{\mathrm{e}^n n!} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$$

1. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1$$

2. Montrer que :

$$v_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\lambda}{n^2}$$

où λ est un réel non nul à préciser.

3. En déduire la nature de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} v_n$, puis que la suite $(\ln(u_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
On a désormais le droit de noter $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} \ln(u_n) \in \mathbb{R}$.

4. Conclure qu'il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$n! \underset{+\infty}{\sim} C\sqrt{n} \cdot \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \qquad (\bigstar)$$

Partie 2 - Obtention de la constante C

Cette partie 2, en grande partie indépendante de la précédente, a pour objectif de déterminer la constante C. Pour ce faire, on s'intéresse aux intégrales de Wallis définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\mathrm{d}t$$

5. `Méthode 1 - Obtention d'un équivalent de` $(I_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$

   (a) Compléter l'annexe fournie.

   (b) Calculer I_0, I_1 et I_2.

   (c) À l'aide d'une intégration par parties simple, montrer que :

   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_{n+1} = \frac{n}{n+1} I_{n-1}$$

   (d) En déduire que la suite $(nI_nI_{n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est constante égale à $\frac{\pi}{2}$.

   (e) Établir avec soin l'encadrement suivant :

   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_{n+1}I_n \leq I_n^2 \leq I_nI_{n-1}$$

   (f) Déduire des questions précédentes que $I_{2n} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{4n}}$.

6. **Méthode 2 - Obtention d'un équivalent de $(I_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$**

   (a) Compléter l'annexe fournie, puis montrer rigoureusement que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{\pi} \cos^{2n}(t)\mathrm{d}t = 2I_{2n}$$

   (b) En déduire que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{2n} = \frac{1}{2\times 4^n}\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{i2(k-n)t}\mathrm{d}t$$

   (c) Simplifier, en fonction de $p \in \mathbb{Z}$, la quantité $\displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{ipt}\mathrm{d}t$.

   (d) Déduire des questions précédentes que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{2n} = \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}\frac{\pi}{2}$$

   (e) À l'aide de ($\bigstar$), déterminer alors un nouvel équivalent de $(I_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de n et C.

7. **Obtention de la constante C**
   Conclure quant à la valeur de la constante C à partir des deux équivalents de $(I_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$.

Partie 3 - Application de la formule de Stirling

On considère la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \left(\frac{(2n)!}{n^n n!}\right)^{\frac{1}{n}}$$

8. Déterminer l'éventuelle limite de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ à l'aide de la formule de Stirling.

9. Retrouver le résultat précédent à l'aide du théorème sur les sommes de Riemann.

Exercice

L'objectif est de résoudre l'équation différentielle (E) suivante d'inconnue $y :]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ dérivable :
$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad xy''(x) + 2y'(x) - xy(x) = 2\,\mathrm{ch}(x) \tag{E}$$
Pour ce faire, on introduit l'équation intermédiaire (F) suivante d'inconnue $z :]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ dérivable :
$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad z''(x) - z(x) = 2\,\mathrm{ch}(x) \tag{F}$$

1. **Résolution de l'équation intermédiaire (F)**

   (a) Déterminer une solution particulière z_p de (F) sous la forme $z_p : x \mapsto (ax+b)\,\mathrm{sh}(x)$, où a et b sont deux constantes à préciser.

   (b) En déduire la résolution de (F).

2. **Résolution de l'équation initiale (E)**
   On pose désormais : $\forall x \in]0,+\infty[,\ u(x) = xy(x)$.

   (a) Montrer l'équivalence suivante : $\big[\, y$ est solution de $(E)\,\big] \Longleftrightarrow \big[\, u$ est solution de $(F)\,\big]$

   (b) En déduire la résolution de (E).

3. **Prolongement des solutions de (E)**
   Soit $f :]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ une solution quelconque de (E).

   (a) Déterminer un développement asymptotique de $f(x)$ à la précision $\underset{x\to 0}{o}(x^2)$.

   (b) À quelle condition nécessaire et suffisante f est-elle prolongeable par continuité en 0 ?
   On suppose désormais cette condition vérifiée et on note $\tilde{f}$ la fonction prolongée.

   (c) À partir uniquement du $DL_2(0)$ de $f(x)$, répondre en justifiant aux questions suivantes :

      i. $\tilde{f}$ est-elle dérivable en 0 ? Si oui, que vaut $\tilde{f}'(0)$?

      ii. $\tilde{f}$ est-elle deux fois dérivable en 0 ? Si oui, que vaut $\tilde{f}''(0)$?