Epreuve de Mathématiques

Durée 2 h 30

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Tournez la page S.V.P.

Problème - Formule de Stirling et application

Partie 1 - Une première formule

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons que $v_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1$.

   Calculons pour commencer :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^{n+1}\sqrt{n+1}}{e^{n+1}(n+1)!} \times \frac{e^n n!}{n^n\sqrt{n}} = \frac{(n+1)^{n+\frac{1}{2}}(n+1)}{e^n e(n+1)n!} \times \frac{e^n n!}{n^{n+\frac{1}{2}}} \underset{(\bigstar)}{=} \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}$$

   Ainsi, il vient que :

$$\begin{aligned} v_n &= \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \\ &\underset{(\bigstar)}{=} \ln\left(\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}\right) \\ &\underset{\ln(e)=1}{=} \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Conclusion : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1.}$$

2. Calculons pour n au voisinage de $+\infty$:

$$\begin{aligned} v_n \underset{q1)}{=} &= \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\Big(1+\underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0}\Big) - 1 \\ &\underset{DA}{=} \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - 1 \\ &= \left[\begin{array}{ccccccccc} & 1 & - & \frac{1}{2n} & + & \frac{1}{3n^2} & + & \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ & & + & \frac{1}{2n} & - & \frac{1}{4n^2} & + & \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ - & 1 & & & & & & \end{array}\right] \\ &= (1-1)1 + \left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{n} + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)\frac{1}{n^2} + \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \frac{1}{12n^2} + \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{12n^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Conclusion : } v_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{12n^2}.}$$

   RQ : il faut gérer le $\underset{+\infty}{o}(\quad)$, sinon la question n'a plus aucun intérêt !

3. – *(Nature de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} v_n$)*

   Appliquons le théorème de comparaison par des équivalents :

   - $v_n \underset{\substack{+\infty \\ (i)}}{\sim} \frac{1}{12n^2} \underset{(ii)}{\geq} 0$,
   - la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ converge (Riemann, $\alpha = 2 > 1$) (iii),

   donc il vient que :

$$\boxed{\text{Conclusion : la série } \sum_{n\in\mathbb{N}^*} v_n \text{ converge.}}$$

– *(Convergence de la suite* $(\ln(u_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$*)*
On a alors les déductions suivantes :

$$\begin{array}{lll} & \text{la série } \sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} v_n \text{ converge} & \\ \text{d'où :} & \text{la série } \sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \text{ converge} & \\ \text{d'où :} & \text{la série } \sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) \text{ converge} & \textit{car les } u_n > 0 \\ \text{d'où :} & \text{la suite } (\ln(u_n))_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge} & \textit{par théorème sur les séries télescopiques} \end{array}$$

$\boxed{\text{Conclusion : la suite } (\ln(u_n))_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge.}}$
Ce qui autorise à poser $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} \ln(u_n) \in \mathbb{R}$.

4. On a les déductions suivantes :

$$\begin{array}{lrcll} & \lim\limits_{n\to+\infty} \ln(u_n) & = & \ell & \\ \text{d'où :} & \lim\limits_{n\to+\infty} u_n & = & e^{\ell} & \textit{par continuité de } \exp \\ \text{d'où :} & u_n & \underset{+\infty}{\sim} & e^{\ell} & \textit{possible car } e^{\ell} \neq 0 \\ \text{d'où :} & \frac{n^n\sqrt{n}}{e^n n!} & \underset{+\infty}{\sim} & e^{\ell} & \\ \text{d'où :} & \frac{n^n\sqrt{n}}{e^n e^{\ell}} & \underset{+\infty}{\sim} & n! & \\ \text{d'où :} & n! & \underset{+\infty}{\sim} & C\sqrt{n}\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n & \textit{en posant } C = e^{-\ell} > 0 \end{array}$$

$\boxed{\text{Conclusion : il existe une constante } C > 0 \text{ telle que } n! \underset{+\infty}{\sim} C\sqrt{n}\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n.}$

Partie 2 - Obtention de la constante C

5. `Méthode 1 - Obtention d'un équivalent de` $(I_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$

(a) Cf corrigé de l'annexe.

(b) - *(Calculs de* I_0 *et* I_1*)*
$\boxed{\text{Conclusion : } I_0 = \frac{\pi}{2} \text{ et } I_1 = 1.}$

- *(Calcul de* I_2*)*
Calculons :

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1+\cos(2t))\mathrm{d}t \quad \textit{par formule de linéarisation} \\ &= \frac{1}{2}\left[t + \frac{\sin(2t)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Conclusion : } I_2 = \frac{\pi}{4}.}$
RQ : les valeurs trouvées vérifient $I_2 < I_1 < I_1$*, ce qui est cohérent avec la stricte décroissance conjecturée de* $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$*.*

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculons :

$$\begin{aligned}
I_{n+1} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1}(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\cos(t)}_{g'(t)}\underbrace{\cos^n(t)}_{f(t)}\,\mathrm{d}t \\
&\underset{\text{IPP}}{=} \Big[\underbrace{\sin(t)}_{g(t)}\underbrace{\cos^n(t)}_{f(t)}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sin(t)}_{g(t)}\underbrace{\left(-n\sin(t)\cos^{n-1}(t)\right)}_{f'(t)}\,\mathrm{d}t \quad \textit{possible car } f,g \textit{ de classe } \mathscr{C}^1 \\
&= n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)\cos^{n-1}(t)\mathrm{d}t \\
&= n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\cos^2(t)\right)\cos^{n-1}(t)\mathrm{d}t \\
&= nI_{n-1} - nI_{n+1}
\end{aligned}$$

Ainsi, on a établi une équation en I_{n+1}, dont la résolution immédiate permet de trouver que :

$\boxed{\text{Conclusion : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_{n+1} = \frac{n}{n+1}I_{n-1}.}$

RQ : la formule établie est bien compatible avec la valeur de I_2 trouvée en 5 (b) !

(d) Montrons, par récurrence simple, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \underbrace{nI_nI_{n-1} = \frac{\pi}{2}}_{\mathscr{P}(n)}$$

- **(Initialisation)**
  Montrons l'égalité $\mathscr{P}(1)$ i.e. $1 \times I_1 I_0 = \frac{\pi}{2}$.
  L'égalité est bien vérifiée par 5 (b).
- **(Hérédité)** Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \left[\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)\right]$.
  Soit $n \in \mathbb{N}^*$. | Supposons l'égalité $\mathscr{P}(n)$.
  | Montrons l'égalité $\mathscr{P}(n+1)$ i.e. $(n+1)I_{n+1}I_n = \frac{\pi}{2}$.
  Sachant que $n \in \mathbb{N}^*$, calculons :

$$(n+1)I_{n+1}I_n \underset{5\,(c)}{=} (n+1)\frac{n}{n+1}I_{n-1}I_n = nI_nI_{n-1} \underset{H.R.}{=} \frac{\pi}{2}$$

  Ce qui achève l'hérédité.

$\boxed{\text{Conclusion : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \ nI_nI_{n-1} = \frac{\pi}{2} \quad \text{i.e. } (nI_nI_{n-1})_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est constante égale à } \frac{\pi}{2}.}$

(e) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons que $I_{n+1}I_n \leq I_n^2 \leq I_nI_{n-1}$.
Montrons d'abord que | $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante (i)
| $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive (ii)

$\boxed{(i)}$ Soit $n \in \mathbb{N}$. Étudions le signe de la différence $I_{n+1} - I_n$:

$$I_{n+1} - I_n \underset{\text{linéarité de } \int}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[(\cos t)^{n+1} - (\cos t)^n\right]dt = \underbrace{\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}}}_{\geq 0} \underbrace{(\cos t)^n}_{\geq 0}\underbrace{(-1+\cos t)}_{\leq 0}\,dt}_{\leq 0}$$

De manière plus rigoureuse :

$$\begin{array}{llrcll}
& \forall t \in [0, \frac{\pi}{2}], & -1+\cos t & \leq & 0 & \\
\text{d'où :} & \forall t \in [0, \frac{\pi}{2}], & (\cos t)^n(-1+\cos t) & \leq & 0 & \text{car } (\cos t)^n \geq 0 \\
\text{d'où :} & & \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n(-1+\cos t) & \leq & \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 0dt & \begin{array}{c}\text{par croissance de } \int \\ \text{et bornes dans le bon sens}\end{array} \\
\text{d'où :} & & I_{n+1} - I_n & \leq & 0 & \\
\text{d'où :} & & I_{n+1} & \leq & I_n &
\end{array}$$

Ainsi, la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien décroissante.

$\boxed{(ii)}$ Soit $n \in \mathbb{N}$. On a les déductions suivantes :

$$\begin{array}{lrcll} & \forall t \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad (\cos t)^n & \geq & 0 & \\ \text{d'où :} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n dt & \geq & \int_0^{\frac{\pi}{2}} 0 dt & \text{par croissance de } \int \text{ et bornes dans le bon sens} \\ \text{d'où :} & I_n & \geq & 0 & \end{array}$$

Ainsi, la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien positive.

On a alors les déductions suivantes :

$$\begin{array}{lrcccccl} & \forall n \in \mathbb{N}^*, & I_{n+1} & \leq & I_n & \leq & I_{n-1} & \textit{car } (I_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \searrow \\ \text{d'où :} & \forall n \in \mathbb{N}^*, & I_{n+1}I_n & \leq & I_n I_n & \leq & I_{n-1}I_n & \textit{car } (I_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \textit{ positive} \end{array}$$

$\boxed{\text{Conclusion : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_{n+1}I_n \leq I_n^2 \leq I_n I_{n-1}.}$

(f) Montrons que $I_{2n} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{4n}}$.

On a les déductions suivantes :

$$\begin{array}{rcccccl} \forall n \in \mathbb{N}^*, & I_{n+1}I_n & \leq & I_n^2 & \leq & I_n I_{n-1} & \textit{par } 5\,(e) \\ & \shortparallel & & & & \shortparallel & \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, & \dfrac{\pi}{2(n+1)} & \leq & I_n^2 & \leq & \dfrac{\pi}{2n} & \textit{par } 5\,(d) \end{array}$$

Or :

- $\dfrac{\pi}{2(n+1)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2n}$,
- $\dfrac{\pi}{2n} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2n}$,

d'où, par le théorème des gendarmes version équivalent, il vient que $I_n^2 \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2n}$.

Ainsi, par opérations licites sur les équivalents (racine carrée et évaluation), il vient que :

$\boxed{\text{Conclusion : } I_{2n} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{4n}}.}$

6. **Méthode 2 - Obtention d'un équivalent de $(I_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$**

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^{2n}(t)\mathrm{d}t = 2I_{2n}$.

Calculons :

$$\int_0^{\pi} \cos^{2n}(t)\mathrm{d}t = \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(t)\mathrm{d}t}_{=I_n} + \underbrace{\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^{2n}(t)\mathrm{d}t}_{(\bigstar)}$$

Reste à montrer que $(\bigstar) = I_n$.

Calculons :

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^{2n}(t)\mathrm{d}t & \underset{\substack{u=\pi-t \ \mathscr{C}^1 \\ \mathrm{d}u=-\mathrm{d}t}}{=} \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^{2n}(\pi-u)(-\mathrm{d}u) \\ & \underset{\substack{\cos(\pi-u)=-\cos(u) \\ (-1)^{2n}=1}}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(u)\mathrm{d}u \\ & = I_{2n} \end{aligned}$$

Ainsi, il vient que :

$\boxed{\text{Conclusion : } \forall n \in \mathbb{N}, \quad \displaystyle\int_0^{\pi} \cos^{2n}(t)\mathrm{d}t = 2I_{2n}.}$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $I_{2n} = \dfrac{1}{2\times 4^n}\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{i2(k-n)t}\mathrm{d}t$.

Calculons :

$$\begin{aligned}
2I_{2n} &\underset{6\,(b)}{=} \int_0^{\pi}\cos^{2n}(t)\mathrm{d}t\\
&\underset{Euler}{=} \int_0^{\pi}\left(\frac{\mathrm{e}^{it}+\mathrm{e}^{-it}}{2}\right)^{2n}\mathrm{d}t\\
&\underset{\substack{\text{FBN}\\ \text{Moivre}}}{=} \frac{1}{2^{2n}}\int_0^{\pi}\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}\mathrm{e}^{ikt}\mathrm{e}^{-i(2n-k)t}\mathrm{d}t\\
&\underset{linéa.}{=} \frac{1}{4^n}\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{i2(k-n)t}\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Ainsi, il vient que :

$$\boxed{\text{Conclusion : } \forall n\in\mathbb{N},\quad I_{2n} = \frac{1}{2\times 4^n}\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{i2(k-n)t}\mathrm{d}t.}$$

(c) Soit $p \in \mathbb{Z}$.
On a alors la disjonction de cas suivante :

- si $p = 0$, alors :
$$\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{ipt}\mathrm{d}t \underset{\mathrm{e}^{i0}=1}{=} \int_0^{\pi}1\mathrm{d}t = \pi$$
- si $p \neq 0$, alors :
$$\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{ipt}\mathrm{d}t = \left[\frac{\mathrm{e}^{ipt}}{ip}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{ip}((\mathrm{e}^{i\pi})^p - 1) = \frac{1}{ip}((-1)^p - 1)$$

$$\boxed{\text{Conclusion : } \forall p\in\mathbb{Z},\quad \int_0^{\pi}\mathrm{e}^{ipt}\mathrm{d}t = \begin{cases}\pi & \text{si } p = 0\\ \dfrac{1}{ip}((-1)^p-1) & \text{si } p\neq 0\end{cases}.}$$

(d) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $I_{2n} = \dfrac{(2n)!}{4^n(n!)^2}\dfrac{\pi}{2}$.

Calculons :

$$\begin{aligned}
I_{2n} &= \frac{1}{2\times 4^n}\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{i2(k-n)t}\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{2\times 4^n}\Big(\sum_{\substack{k=0\\k\neq n}}^{2n}\binom{2n}{k}\underbrace{\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{i2(k-n)t}\mathrm{d}t}_{=0\ \ par\ 6\,(c)} + \underbrace{\binom{2n}{n}\pi}_{k=n}\Big)\\
&= \frac{\pi}{2\times 4^n}\binom{2n}{n}
\end{aligned}$$

En explicitant le coefficient binomial, il vient alors que :

$$\boxed{\text{Conclusion : } \forall n\in\mathbb{N},\quad I_{2n} = \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}\frac{\pi}{2}.}$$

(e) Calculons :

$$\begin{aligned}
I_{2n} &= \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}\cdot\frac{\pi}{2}\\
&\underset{+\infty}{\sim} \frac{C\sqrt{2n}(\frac{2n}{\mathrm{e}})^{2n}}{4^n(C\sqrt{n}(\frac{n}{\mathrm{e}})^n)^2}\cdot\frac{\pi}{2} \quad par\ (\bigstar)\\
&\underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{C}\cdot\frac{\pi}{\sqrt{2n}}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Conclusion : } I_{2n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{C\sqrt{2n}}.}$$

7. Obtention de la constante C

   Résumons la situation :

   - par 5 (f), $I_{2n} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{4n}}$,
   - par 6 (f), $I_{2n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{C\sqrt{2n}}$,

   d'où, il vient que :

$$\sqrt{\frac{\pi}{4n}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{C\sqrt{2n}} \Longleftrightarrow C \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi} \underset{cstes}{\Longleftrightarrow} C = \sqrt{2\pi}$$

$$\boxed{\text{Conclusion : } C = \sqrt{2\pi} \text{ et } n! = \sqrt{2\pi n}\cdot(\tfrac{n}{\mathrm{e}})^n.}$$

Partie 3 - Application de la formule de Stirling

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Rappelons que :

$$a_n = \left(\frac{(2n)!}{n!n^n}\right)^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\frac{1}{n}\ln\left(\frac{(2n)!}{n^n n!}\right)\right)$$

Dans les questions 8 et 9, on étudiera d'abord $\frac{1}{n}\ln\left(\frac{(2n)!}{n^n n!}\right)$.

8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a les déductions suivantes :

$$\begin{array}{rrcll}
 & \frac{(2n)!}{n^n n!} & \underset{+\infty}{\sim} & \frac{\sqrt{4\pi n}(\frac{2n}{\mathrm{e}})^{2n}}{n^n\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{\mathrm{e}})^n} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2}\cdot(\frac{4}{\mathrm{e}})^n & \textit{par la formule de Stirling} \\
\text{d'où :} & \frac{(2n)!}{n^n n!} & = & \sqrt{2}\cdot(\frac{4}{\mathrm{e}})^n + \underset{+\infty}{o}((\frac{4}{\mathrm{e}})^n) & \\
\text{d'où :} & \frac{1}{n}\ln(\frac{(2n)!}{n^n n!}) & = & \frac{1}{n}\ln(\sqrt{2}\cdot(\frac{4}{\mathrm{e}})^n + \underset{+\infty}{o}((\frac{4}{\mathrm{e}})^n)) & \\
\text{d'où :} & \frac{1}{n}\ln(\frac{(2n)!}{n^n n!}) & = & \ln(\frac{4}{\mathrm{e}}) + \frac{1}{n}\ln(\sqrt{2} + \underset{+\infty}{o}(1)) & \\
\text{d'où :} & \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln(\frac{(2n)!}{n^n n!}) & = & \ln(\frac{4}{\mathrm{e}}) & \textit{par calculs de limites}
\end{array}$$

   Par continuité de l'exponentielle, il vient que :

$$\boxed{\text{Conclusion : } \lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{4}{\mathrm{e}}.}$$

9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculons :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\ln\left(\frac{(2n)!}{n^n n!}\right) &= \frac{1}{n}\left(\ln(\prod_{k=1}^{2n}k) - n\ln n - \ln(\prod_{k=1}^{n}k)\right) \\
&= -\ln(n) + \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n}\ln(k) = -\ln(n) + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(n+k) \\
&= -\ln(n) + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(n\left(1+\frac{k}{n}\right)\right) \\
&= \underbrace{-\ln(n) + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(n)}_{=0} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi, on reconnaît une somme de Riemann :

$$\frac{1}{n}\ln\left(\frac{(2n)!}{n^n n!}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\underbrace{\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)}_{f(\frac{k}{n})}$$

Appliquons le théorème sur les sommes de Riemann à $f : t \mapsto \ln(1+t)$ continue sur le segment $[0,1]$:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$$

Or :

$$\int_0^1 \ln(1+t)\mathrm{d}t \underset{\substack{u=1+t\ \mathscr{C}^1\\ \mathrm{d}u=\mathrm{d}t}}{=} \int_1^2 \ln(u)\mathrm{d}u = \left[u\ln(u)-u\right]_1^2 = 2\ln(2)-1 = \ln(\frac{4}{\mathrm{e}})$$

D'où :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln(\frac{(2n)!}{n^n n!}) = \ln(\frac{4}{\mathrm{e}})$$

Ainsi, par continuité de l'exponentielle, on retrouve que :

$\boxed{\text{Conclusion } \lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{4}{\mathrm{e}}.}$

Exercice

1. **Résolution de l'équation intermédiaire (F)**

(a) Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.
Sachant que $\left|\begin{array}{l} z_p \text{ est deux fois dérivable sur }]0,+\infty[\\ \forall x\in]0,+\infty[,\ z_p''(x) = 2a\mathrm{ch}(x)+(ax+b)\mathrm{sh}(x)\end{array}\right.$, on a les équivalences suivantes :
RQ : pour obtenir la dérivée seconde rapidement, il faut utiliser la formule de Leibniz !

$$\begin{aligned} z_p \text{ est une solution particulière de } (E) &\iff \forall x\in]0,+\infty[,\quad z_p''(x)-z_p(x) = 2\,\mathrm{ch}(x)\\ &\iff \forall x\in]0,+\infty[,\quad 2a\mathrm{ch}(x) = 2\,\mathrm{ch}(x)\\ &\iff a = 1\end{aligned}$$

Ainsi, il vient qu'une solution particulière de (E) est la fonction :
$\boxed{\text{Conclusion : } z_p : x\mapsto x\mathrm{sh}(x).}$

(b) Comme (F) est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants, on procède comme suit :

- `Résolution de l'équation homogène` (F_H)
$(F_H) : z''(x)-z(x) = 0$ a pour équation caractéristique $(F_C) : r^2-1=0$ dont les racines sont ±1.
Ainsi, les solutions de (F_H) sont exactement les fonctions :

$$z_H : x\mapsto \lambda\mathrm{e}^x+\mu\mathrm{e}^{-x},\quad (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$$

- `Recherche d'une solution particulière de l'équation` (F)
La fonction z_p précédemment trouvée est une solution particulière de (F).

Ainsi, par théorème, il vient que :

$\boxed{\text{Conclusion : les solutions de } (F) \text{ sont les fonctions } z : x\mapsto \lambda\mathrm{e}^x+\mu\mathrm{e}^{-x}+x\mathrm{sh}(x),\quad (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2.}$

2. **Résolution de l'équation initiale (E)**

(a) Par opérations élémentaires, il est immédiat que $[\, y \text{ est } \mathscr{D}^2 \text{ sur }]0,+\infty[\,] \Leftrightarrow [\, u \text{ est } \mathscr{D}^2 \text{ sur }]0,+\infty[\,]$. On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}[\, u \text{ est solution de } (F)\,] &\Leftrightarrow \forall x \in]0,+\infty[, \quad u''(x) - u(x) = 2\mathrm{ch}(x)\\ &\Leftrightarrow \forall x \in]0,+\infty[, \quad 2y'(x) + xy''(x) - xy(x) = 2\mathrm{ch}(x)\\ &\Leftrightarrow [\, y \text{ est solution de } (E)\,]\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Conclusion : } [\, y \text{ est solution de } (E)\,] \Leftrightarrow [\, u \text{ est solution de } (F)\,].}$

(b) Grâce à la question 1 (b), il vient que :

$\boxed{\text{Conclusion : les solutions de } (E) \text{ sont les fonctions } y : x \mapsto \dfrac{\lambda e^x + \mu e^{-x}}{x} + \mathrm{sh}(x), \quad (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2.}$

3. **Prolongement des solutions de (E)**

Soit $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une solution quelconque de (E). Ainsi, par 2 (b), il existe $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad f(x) = \frac{\lambda e^x + \mu e^{-x}}{x} + \mathrm{sh}(x)$$

(a) Calculons pour x au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\lambda e^x + \mu e^{-x}}{x} + \mathrm{sh}(x)\\ &= \frac{1}{x}\left(\lambda\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right) + \mu\left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right)\right) + x + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\\ &= (\lambda+\mu)\frac{1}{x} + (\lambda-\mu) + \frac{1}{2}(\lambda+\mu+2)x + \frac{1}{6}(\lambda-\mu)x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Conclusion : } f(x) = (\lambda+\mu)\dfrac{1}{x} + (\lambda-\mu) + \dfrac{1}{2}(\lambda+\mu+2)x + \dfrac{1}{6}(\lambda-\mu)x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2).}$

(b) Sachant que f est prolongeable par continuité en $0 \notin \mathscr{D}_f$ ssi $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ existe et est finie.

On a alors la disjonction de cas suivante :

- si $\lambda + \mu \neq 0$, alors :

$$f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{\lambda+\mu}{x} \to \mathrm{signe}(\lambda+\mu)\cdot\infty$$

  Ainsi, f n'est pas prolongeable par continuité en 0.
- si $\lambda + \mu = 0$, alors :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lambda - \mu$$

  Ainsi, f est prolongeable par continuité en 0.

$\boxed{\text{Conclusion : } f \text{ est prolongeable par continuité en } 0 \notin \mathscr{D}_f \text{ ssi } \lambda+\mu = 0.}$

(c) La condition précédente étant vérifiée, il vient que :

$$f(x) = 2\lambda + x + \frac{\lambda}{3}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$$

i. Comme $f(x)$ admet un $DL_2(0)$, il admet (par troncature) un $DL_1(0)$ i.e. :

$\boxed{\text{Conclusion : } \tilde{f} \text{ est dérivable en 0 et } \tilde{f}'(0) = (\text{coeff. devant } x) = 1.}$

ii. $\boxed{\text{Conclusion : À partir uniquement du } DL_2(0) \text{ de } f(x)\text{, on ne peut rien déduire sur le caractère deux fois dérivable de } f\,!}$

RQ : par contre, si on arrive à justifier que $\tilde{f}$ est deux fois dérivable en 0 d'une quelconque façon, alors on pourrait déduire du $DL_2(0)$ la valeur de $\tilde{f}''(0)$, qui vaudrait alors $2 \times$ (coeff. devant x^2).