

## Epreuve de Mathématiques

Durée 2 h 30

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

---

**L'usage de calculatrices est interdit.**

### AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction**, la **clarté** et la **précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans l'**appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

# Problème - Formule de Stirling et application

## Partie 1 - Une première formule

1. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrons que  $v_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1$ .

Calculons pour commencer :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^{n+1} \sqrt{n+1}}{e^{n+1} (n+1)!} \times \frac{e^n n!}{n^n \sqrt{n}} = \frac{(n+1)^{n+\frac{1}{2}} (n+1)}{e^n e (n+1) n!} \times \frac{e^n n!}{n^{n+\frac{1}{2}}} \stackrel{(\star)}{=} \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}$$

Ainsi, il vient que :

$$\begin{aligned} v_n &= \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \\ &\stackrel{(\star)}{=} \ln\left(\frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}\right) \\ &\stackrel{\ln(e)=1}{=} \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1 \end{aligned}$$

Conclusion :  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $v_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1$ .

2. Calculons pour  $n$  au voisinage de  $+\infty$  :

$$\begin{aligned} v_n &\stackrel{(q1)}{=} \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \underbrace{\frac{1}{n}}_{\rightarrow 0}\right) - 1 \\ &\stackrel{DA}{=} \left(n + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - 1 \\ &= \left[ \begin{array}{cccc} 1 & - & \frac{1}{2n} & + & \frac{1}{3n^2} & + & o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ & + & \frac{1}{2n} & - & \frac{1}{4n^2} & + & o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ - & 1 & & & & & \end{array} \right] \\ &= (1-1)1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) \frac{1}{n} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{12n^2} \end{aligned}$$

Conclusion :  $v_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{12n^2}$ .

RQ : il faut gérer le  $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ , sinon la question n'a plus aucun intérêt!

3. - (Nature de la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} v_n$ )

Appliquons le théorème de comparaison par des équivalents :

- $v_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{12n^2} \stackrel{(ii)}{\geq} 0$ , (i)
- la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$  converge (Riemann,  $\alpha = 2 > 1$ ) (iii),

donc il vient que :

Conclusion : la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} v_n$  converge.

– (Convergence de la suite  $(\ln(u_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ )

On a alors les déductions suivantes :

la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} v_n$  converge

d'où : la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$  converge

d'où : la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$  converge

car les  $u_n > 0$

d'où : la suite  $(\ln(u_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge

par théorème sur les séries télescopiques

Conclusion : la suite  $(\ln(u_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge.

Ce qui autorise à poser  $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(u_n) \in \mathbb{R}$ .

4. On a les déductions suivantes :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(u_n) = \ell$$

$$\text{d'où : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e^\ell \quad \text{par continuité de exp}$$

$$\text{d'où : } u_n \underset{+\infty}{\sim} e^\ell \quad \text{possible car } e^\ell \neq 0$$

$$\text{d'où : } \frac{n^n \sqrt{n}}{e^n n!} \underset{+\infty}{\sim} e^\ell$$

$$\text{d'où : } \frac{n^n \sqrt{n}}{e^n e^\ell} \underset{+\infty}{\sim} n!$$

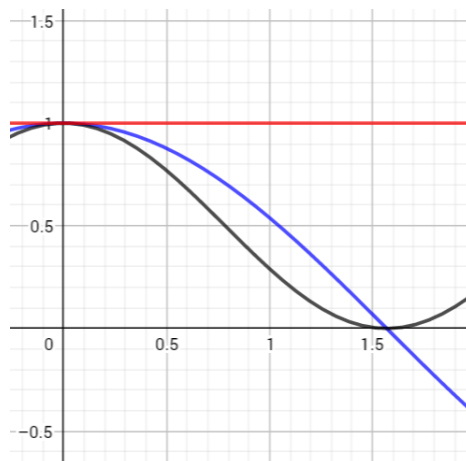
$$\text{d'où : } n! \underset{+\infty}{\sim} C \sqrt{n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \quad \text{en posant } C = e^{-\ell} > 0$$

Conclusion : il existe une constante  $C > 0$  telle que  $n! \underset{+\infty}{\sim} C \sqrt{n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n$ .

## Partie 2 - Obtention de la constante $C$

### 5. Méthode 1 - Obtention d'un équivalent de $(I_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$

(a) (Tracé réalisé avec Geogebra)



On conjecture que  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est positive, décroissante et de limite nulle.

(b) – (Calculs de  $I_0$  et  $I_1$ )

Conclusion :  $I_0 = \frac{\pi}{2}$  et  $I_1 = 1$ .

- (Calcul de  $I_2$ )

Calculons :

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1 + \cos(2t)) dt \quad \text{par formule de linéarisation} \\ &= \frac{1}{2} \left[ t + \frac{\sin(2t)}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Conclusion :  $I_2 = \frac{\pi}{4}$ .

*RQ : les valeurs trouvées vérifient  $I_2 < I_1 < I_0$ , ce qui est cohérent avec la stricte décroissance conjecturée de  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .*

(c) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Calculons :

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1}(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\cos(t)}_{g'(t)} \underbrace{\cos^n(t)}_{f(t)} dt \\ &\stackrel{\text{IPP}}{=} \left[ \underbrace{\sin(t)}_{g(t)} \underbrace{\cos^n(t)}_{f(t)} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sin(t)}_{g(t)} \underbrace{(-n \sin(t) \cos^{n-1}(t))}_{f'(t)} dt \quad \text{possible car } f, g \text{ de classe } \mathcal{C}^1 \\ &= n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t) \cos^{n-1}(t) dt \\ &= n \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2(t)) \cos^{n-1}(t) dt \\ &= nI_{n-1} - nI_{n+1} \end{aligned}$$

Ainsi, on a établi une équation en  $I_{n+1}$ , dont la résolution immédiate permet de trouver que :

Conclusion :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_{n+1} = \frac{n}{n+1} I_{n-1}$ .

*RQ : la formule établie est bien compatible avec la valeur de  $I_2$  trouvée en 5 (b) !*

(d) Montrons, par récurrence simple, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \underbrace{nI_n I_{n-1}}_{\mathcal{P}(n)} = \frac{\pi}{2}$$

• (Initialisation)

Montrons l'égalité  $\mathcal{P}(1)$  i.e.  $1 \times I_1 I_0 = \frac{\pi}{2}$ .

L'égalité est bien vérifiée par 5 (b).

• (Hérédité) Montrons que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, [\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)]$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Supposons l'égalité  $\mathcal{P}(n)$ .

Montrons l'égalité  $\mathcal{P}(n+1)$  i.e.  $(n+1)I_{n+1}I_n = \frac{\pi}{2}$ .

Sachant que  $n \in \mathbb{N}^*$ , calculons :

$$(n+1)I_{n+1}I_n \stackrel{5(c)}{=} (n+1) \frac{n}{n+1} I_{n-1}I_n = nI_n I_{n-1} \stackrel{H.R.}{=} \frac{\pi}{2}$$

Ce qui achève l'hérédité.

Conclusion :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad nI_n I_{n-1} = \frac{\pi}{2}$  i.e.  $(nI_n I_{n-1})_{n \in \mathbb{N}^*}$  est constante égale à  $\frac{\pi}{2}$ .

(e) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrons que  $I_{n+1}I_n \leq I_n^2 \leq I_n I_{n-1}$ .

Montrons d'abord que  $\left| \begin{array}{ll} (I_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est décroissante} & (i) \\ (I_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est positive} & (ii) \end{array} \right.$

(i) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Étudions le signe de la différence  $I_{n+1} - I_n$  :

$$I_{n+1} - I_n \underset{\text{linéarité de } \int}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [(\cos t)^{n+1} - (\cos t)^n] dt = \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{(\cos t)^n}_{\geq 0} \underbrace{(-1 + \cos t)}_{\leq 0} dt}_{\leq 0}$$

De manière plus rigoureuse :

$$\begin{aligned} \forall t \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad & -1 + \cos t \leq 0 \\ \text{d'où : } \forall t \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad & (\cos t)^n (-1 + \cos t) \leq 0 \quad \text{car } (\cos t)^n \geq 0 \\ \text{d'où : } \quad & \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n (-1 + \cos t) dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} 0 dt \quad \text{par croissance de } \int \\ & \text{et bornes dans le bon sens} \\ \text{d'où : } \quad & I_{n+1} - I_n \leq 0 \\ \text{d'où : } \quad & I_{n+1} \leq I_n \end{aligned}$$

Ainsi, la suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bien décroissante.

(ii) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On a les déductions suivantes :

$$\begin{aligned} \forall t \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad & (\cos t)^n \geq 0 \\ \text{d'où : } \quad & \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n dt \geq \int_0^{\frac{\pi}{2}} 0 dt \quad \text{par croissance de } \int \\ & \text{et bornes dans le bon sens} \\ \text{d'où : } \quad & I_n \geq 0 \end{aligned}$$

Ainsi, la suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bien positive.

On a alors les déductions suivantes :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad & I_{n+1} \leq I_n \leq I_{n-1} \quad \text{car } (I_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \searrow \\ \text{d'où : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad & I_{n+1} I_n \leq I_n I_n \leq I_{n-1} I_n \quad \text{car } (I_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ positive} \end{aligned}$$

Conclusion :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_{n+1} I_n \leq I_n^2 \leq I_n I_{n-1}$ .

(f) Montrons que  $I_{2n} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{4n}}$ .

On a les déductions suivantes :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad & I_{n+1} I_n \leq I_n^2 \leq I_n I_{n-1} \quad \text{par 5 (e)} \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad & \frac{\pi}{2(n+1)} \leq I_n^2 \leq \frac{\pi}{2n} \quad \text{par 5 (d)} \end{aligned}$$

Or :

- $\frac{\pi}{2(n+1)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2n}$ ,
- $\frac{\pi}{2n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2n}$ ,

d'où, par le théorème des gendarmes version équivalent, il vient que  $I_n^2 \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2n}$ .

Ainsi, par opérations licites sur les équivalents (racine carrée et évaluation), il vient que :

Conclusion :  $I_{2n} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{4n}}$ .

6. Méthode 2 - Obtention d'un équivalent de  $(I_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$

(a) (Tracé réalisé avec Geogebra)



Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Montrons que  $\int_0^\pi \cos^{2n}(t) dt = 2I_{2n}$ .

Calculons :

$$\int_0^\pi \cos^{2n}(t) dt = \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(t) dt}_{=I_n} + \underbrace{\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \cos^{2n}(t) dt}_{(\star)}$$

Reste à montrer que  $(\star) = I_n$ .

Calculons :

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \cos^{2n}(t) dt & \stackrel{u=\pi-t, \mathcal{C}^1, du=-dt}{=} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^{2n}(\pi-u)(-du) \\ & \stackrel{\cos(\pi-u)=-\cos(u), (-1)^{2n}=1}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(u) du \\ & = I_{2n} \end{aligned}$$

Ainsi, il vient que :

Conclusion :  $\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^\pi \cos^{2n}(t) dt = 2I_{2n}$ .

(b) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Montrons que  $I_{2n} = \frac{1}{2 \times 4^n} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \int_0^\pi e^{i2(k-n)t} dt$ .

Calculons :

$$\begin{aligned} 2I_{2n} & \stackrel{6(b)}{=} \int_0^\pi \cos^{2n}(t) dt \\ & \stackrel{Euler}{=} \int_0^\pi \left( \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \right)^{2n} dt \\ & \stackrel{FBN, Moivre}{=} \frac{1}{2^{2n}} \int_0^\pi \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} e^{ikt} e^{-i(2n-k)t} dt \\ & \stackrel{linéa.}{=} \frac{1}{4^n} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \int_0^\pi e^{i2(k-n)t} dt \end{aligned}$$

Ainsi, il vient que :

Conclusion :  $\forall n \in \mathbb{N}, I_{2n} = \frac{1}{2 \times 4^n} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \int_0^\pi e^{i2(k-n)t} dt$ .

(c) Soit  $p \in \mathbb{Z}$ .

On a alors la disjonction de cas suivante :

- si  $p = 0$ , alors :

$$\int_0^\pi e^{ipt} dt \stackrel{e^{i0}=1}{=} \int_0^\pi 1 dt = \pi$$

- si  $p \neq 0$ , alors :

$$\int_0^\pi e^{ipt} dt = \left[ \frac{e^{ipt}}{ip} \right]_0^\pi = \frac{1}{ip} ((e^{i\pi})^p - 1) = \frac{1}{ip} ((-1)^p - 1)$$

Conclusion :  $\forall p \in \mathbb{Z}, \int_0^\pi e^{ipt} dt = \begin{cases} \pi & \text{si } p = 0 \\ \frac{1}{ip} ((-1)^p - 1) & \text{si } p \neq 0 \end{cases}$ .

(d) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Montrons que  $I_{2n} = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \frac{\pi}{2}$ .

Calculons :

$$\begin{aligned} I_{2n} &= \frac{1}{2 \times 4^n} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \int_0^\pi e^{i2(k-n)t} dt \\ &= \frac{1}{2 \times 4^n} \left( \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq n}}^{2n} \binom{2n}{k} \underbrace{\int_0^\pi e^{i2(k-n)t} dt}_{=0 \text{ par 6 (c)}} + \underbrace{\binom{2n}{n} \int_0^\pi dt}_{k=n} \right) \\ &= \frac{\pi}{2 \times 4^n} \binom{2n}{n} \end{aligned}$$

En explicitant le coefficient binomial, il vient alors que :

Conclusion :  $\forall n \in \mathbb{N}, I_{2n} = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \frac{\pi}{2}$ .

(e) Calculons :

$$\begin{aligned} I_{2n} &= \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} \\ &\underset{+\infty}{\sim} \frac{C \sqrt{2n} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{4^n (C \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n)^2} \cdot \frac{\pi}{2} \text{ par } (\star) \\ &\underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{C} \cdot \frac{\pi}{\sqrt{2n}} \end{aligned}$$

Conclusion :  $I_{2n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{C \sqrt{2n}}$ .

### 7. Obtention de la constante $C$

Résumons la situation :

- par 5 (f),  $I_{2n} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{4n}}$ ,
- par 6 (f),  $I_{2n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{C \sqrt{2n}}$ ,

d'où, il vient que :

$$\sqrt{\frac{\pi}{4n}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{C \sqrt{2n}} \iff C \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi} \underset{cstes}{\iff} C = \sqrt{2\pi}$$

Conclusion :  $C = \sqrt{2\pi}$  et  $n! = \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n$ .

## Partie 3 - Application de la formule de Stirling

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Rappelons que :

$$a_n = \left( \frac{(2n)!}{n! n^n} \right)^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\frac{1}{n} \ln\left(\frac{(2n)!}{n^n n!}\right)\right)$$

Dans les questions 8 et 9, on étudiera d'abord  $\frac{1}{n} \ln\left(\frac{(2n)!}{n^n n!}\right)$ .

8. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On a les déductions suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{(2n)!}{n^n n!} &\underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{4\pi n} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{n^n \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2} \cdot \left(\frac{4}{e}\right)^n \quad \text{par la formule de Stirling} \\ \text{d'où :} \quad \frac{(2n)!}{n^n n!} &= \sqrt{2} \cdot \left(\frac{4}{e}\right)^n + o_{+\infty}\left(\left(\frac{4}{e}\right)^n\right) \\ \text{d'où :} \quad \frac{1}{n} \ln\left(\frac{(2n)!}{n^n n!}\right) &= \frac{1}{n} \ln\left(\sqrt{2} \cdot \left(\frac{4}{e}\right)^n + o_{+\infty}\left(\left(\frac{4}{e}\right)^n\right)\right) \\ \text{d'où :} \quad \frac{1}{n} \ln\left(\frac{(2n)!}{n^n n!}\right) &= \ln\left(\frac{4}{e}\right) + \frac{1}{n} \ln\left(\sqrt{2} + o_{+\infty}(1)\right) \\ \text{d'où :} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln\left(\frac{(2n)!}{n^n n!}\right) &= \ln\left(\frac{4}{e}\right) \quad \text{par calculs de limites} \end{aligned}$$

Par continuité de l'exponentielle, il vient que :

Conclusion :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{4}{e}$ .

9. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Calculons :

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \ln\left(\frac{(2n)!}{n^n n!}\right) &= \frac{1}{n} \left( \ln\left(\prod_{k=1}^{2n} k\right) - n \ln n - \ln\left(\prod_{k=1}^n k\right) \right) \\ &= -\ln(n) + \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{2n} \ln(k) = -\ln(n) + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(n+k) \\ &= -\ln(n) + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln\left(n \left(1 + \frac{k}{n}\right)\right) \\ &= \underbrace{-\ln(n) + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(n)}_{=0} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right) \end{aligned}$$

Ainsi, on reconnaît une somme de Riemann :

$$\frac{1}{n} \ln\left(\frac{(2n)!}{n^n n!}\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \underbrace{\ln\left(1 + \frac{k}{n}\right)}_{f\left(\frac{k}{n}\right)}$$

Appliquons le théorème sur les sommes de Riemann à  $f : t \mapsto \ln(1+t)$  continue sur le segment  $[0, 1]$  :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t) dt$$

Or :

$$\int_0^1 \ln(1+t) dt \underset{\substack{u=1+t \\ du=dt}}{=} \int_1^2 \ln(u) du = [u \ln(u) - u]_1^2 = 2 \ln(2) - 1 = \ln\left(\frac{4}{e}\right)$$

D'où :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln\left(\frac{(2n)!}{n^n n!}\right) = \ln\left(\frac{4}{e}\right)$$

Ainsi, par continuité de l'exponentielle, on retrouve que :

Conclusion  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{4}{e}$ .



# Exercice

## 1. Résolution de l'équation intermédiaire (F)

(a) Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ .

Sachant que  $\left| \begin{array}{l} z_p \text{ est deux fois dérivable sur } ]0, +\infty[ \\ \forall x \in ]0, +\infty[, z_p''(x) = 2ach(x) + (ax + b)\text{sh}(x) \end{array} \right.$ , on a les équivalences suivantes :

*RQ : pour obtenir la dérivée seconde rapidement, il faut utiliser la formule de Leibniz !*

$$\begin{aligned} z_p \text{ est une solution particulière de } (E) &\Leftrightarrow \forall x \in ]0, +\infty[, z_p''(x) - z_p(x) = 2 \text{ch}(x) \\ &\Leftrightarrow \forall x \in ]0, +\infty[, 2ach(x) = 2 \text{ch}(x) \\ &\Leftrightarrow a = 1 \end{aligned}$$

Ainsi, il vient qu'une solution particulière de (E) est la fonction :

Conclusion :  $z_p : x \mapsto x \text{sh}(x)$ .

(b) Comme (F) est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants, on procède comme suit :

- Résolution de l'équation homogène ( $F_H$ )

( $F_H$ ) :  $z''(x) - z(x) = 0$  a pour équation caractéristique ( $F_C$ ) :  $r^2 - 1 = 0$  dont les racines sont  $\pm 1$ .

Ainsi, les solutions de ( $F_H$ ) sont exactement les fonctions :

$$z_H : x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{-x}, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

- Recherche d'une solution particulière de l'équation (F)

La fonction  $z_p$  précédemment trouvée est une solution particulière de (F).

Ainsi, par théorème, il vient que :

Conclusion : les solutions de (F) sont les fonctions  $z : x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{-x} + x \text{sh}(x)$ ,  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ .

## 2. Résolution de l'équation initiale (E)

- (a) Par opérations élémentaires, il est immédiat que  $[y \text{ est } \mathcal{D}^2 \text{ sur } ]0, +\infty[ ] \Leftrightarrow [u \text{ est } \mathcal{D}^2 \text{ sur } ]0, +\infty[ ]$ .  
On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} [u \text{ est solution de } (F)] &\Leftrightarrow \forall x \in ]0, +\infty[, & u''(x) - u(x) &= 2\text{ch}(x) \\ &\Leftrightarrow \forall x \in ]0, +\infty[, & 2y'(x) + xy''(x) - xy(x) &= 2\text{ch}(x) \\ &\Leftrightarrow [y \text{ est solution de } (E)] \end{aligned}$$

Conclusion :  $[y \text{ est solution de } (E)] \Leftrightarrow [u \text{ est solution de } (F)]$ .

- (b) Grâce à la question 1 (b), il vient que :

Conclusion : les solutions de (E) sont les fonctions  $y : x \mapsto \frac{\lambda e^x + \mu e^{-x}}{x} + \text{sh}(x)$ ,  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ .

## 3. Prolongement des solutions de (E)

Soit  $f : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une solution quelconque de (E). Ainsi, par 2 (b), il existe  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$  tel que :

$$\forall x \in ]0, +\infty[, \quad f(x) = \frac{\lambda e^x + \mu e^{-x}}{x} + \text{sh}(x)$$

- (a) Calculons pour  $x$  au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\lambda e^x + \mu e^{-x}}{x} + \text{sh}(x) \\ &= \frac{1}{x}(\lambda(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^3)) + \mu(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^3))) + x + o_{x \rightarrow 0}(x^2) \\ &= (\lambda + \mu)\frac{1}{x} + (\lambda - \mu) + \frac{1}{2}(\lambda + \mu + 2)x + \frac{1}{6}(\lambda - \mu)x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2) \end{aligned}$$

Conclusion :  $f(x) = (\lambda + \mu)\frac{1}{x} + (\lambda - \mu) + \frac{1}{2}(\lambda + \mu + 2)x + \frac{1}{6}(\lambda - \mu)x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$ .

- (b) Sachant que  $f$  est prolongeable par continuité en  $0 \notin \mathcal{D}_f$  ssi  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  existe et est finie.

On a alors la disjonction de cas suivante :

- si  $\lambda + \mu \neq 0$ , alors :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{\lambda + \mu}{x} \rightarrow \text{signe}(\lambda + \mu) \cdot \infty$$

Ainsi,  $f$  n'est pas prolongeable par continuité en 0.

- si  $\lambda + \mu = 0$ , alors :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lambda - \mu$$

Ainsi,  $f$  est prolongeable par continuité en 0.

Conclusion :  $f$  est prolongeable par continuité en  $0 \notin \mathcal{D}_f$  ssi  $\lambda + \mu = 0$ .

- (c) La condition précédente étant vérifiée, il vient que :

$$f(x) = 2\lambda + x + \frac{\lambda}{3}x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$$

- i. Comme  $f(x)$  admet un  $DL_2(0)$ , il admet (par troncature) un  $DL_1(0)$  i.e. :

Conclusion :  $\tilde{f}$  est dérivable en 0 et  $\tilde{f}'(0) = (\text{coeff. devant } x) = 1$ .

- ii.

Conclusion : À partir uniquement du  $DL_2(0)$  de  $f(x)$ , on ne peut rien déduire sur le caractère deux fois dérivable de  $f$ !

*RQ : par contre, si on arrive à justifier que  $\tilde{f}$  est deux fois dérivable en 0 d'une quelconque façon, alors on pourrait déduire du  $DL_2(0)$  la valeur de  $\tilde{f}''(0)$ , qui vaudrait alors  $2 \times (\text{coeff. devant } x^2)$ .*