Epreuve de mathématiques 1
2020-2021

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé
Durée : 3h

Encadrer les résultats et numéroter les copies

Problème 1 - Fonctions réelles

On considère la fonction

$$f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \frac{1}{1+x+x^2}.\end{array}$$

Partie 1 : Etude de la fonction

1. Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer la parité de f.
3. Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = -\frac{1+2x}{\left(1+x+x^2\right)^2}.$$
4. Déterminer le tableau de variations complet de f.
5. La graphe de f admet-il une asymptote en $+\infty$? Si oui préciser son équation.
6. Discuter suivant les valeurs de m **le nombre** de solutions de l'équation $f(x) = m$.
7. La fonction f est-elle majorée ? minorée ? bornée ?
8. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Comparer $f\left(x - \frac{1}{2}\right)$ et $f\left(-x - \frac{1}{2}\right)$.
   (b) Quelle conséquence graphique peut-on en déduire ?
9. Déterminer l'équation de la tangente à f au point d'abscisse $x_0 = 0$.
10. Tracer l'allure du graphe de f, on y fera apparaitre le tangente déterminée à la question précédente.

Partie 2 : Etude de la dérivée

On pose

$$g = f':\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & -\frac{1+2x}{\left(1+x+x^2\right)^2}.\end{array}$$

11. Calculer g'. On donnera le résultat sous forme factorisée.
12. En déduire le tableau de variations complet de g.
13. En déduire les ensembles suivants :
    (a) $g\left(\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right]\right)$
    (b) $g\left(]-1; 1[\right)$
    (c) $g^{\leftarrow}\left(\mathbb{R}_+\right)$
    (d) $g^{\leftarrow}\left(]-1; 0]\right)$
14. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Comparer $g\left(x - \frac{1}{2}\right)$ et $g\left(-x - \frac{1}{2}\right)$.
    (b) Quelle conséquence graphique peut-on en déduire ?
15. On pose $h = g'$. Calculer h'.

Partie 3 : Une suite définie par récurrence

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$u_0 = 1, \qquad u_{n+1} = f \circ f\,(u_n)\,.$$

16. Calculer u_1.
17. Montrer que l'équation $x^3 + x^2 + x - 1 = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$. On note α cette solution.
18. Justifier que $\alpha \in \left[\frac{1}{3}; 1\right]$
19. Montrer que le segment $[\alpha; 1]$ est stable par $f \circ f$ c'est-à-dire

$$f \circ f\,([\alpha; 1]) \subseteq [\alpha; 1]\,.$$

20. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [\alpha; 1]$.
21. Montrer que $f \circ f$ est croissante sur $[\alpha; 1]$.
22. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Que peut-on en déduire ?

Problème 2 - Logique

On note $\mathscr{F}(\mathbb{N},\mathbb{N})$ l'ensemble des fonctions sur $\mathbb{N}$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ et $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ celui des fonctions sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Partie 1 : Les fonctions réelles

Pour $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on considère les assertions suivantes :

$$\begin{array}{lll} A_{\mathbb{R}}(f) : & « \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad [x < y] \ \Rightarrow \ [f(x) < f(y)] \ » \\ B_{\mathbb{R}}(f) : & « \ \forall x \in \mathbb{R}, \quad [f(x+1) > f(x)] \ » \end{array}$$

Soit $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

1. A quelle définition du cours correspond $A_{\mathbb{R}}(f)$? Donner un exemple de fonction f vérifiant $A_{\mathbb{R}}(f)$.
2. Préciser $\overline{A_{\mathbb{R}}(f)}$ et $\overline{B_{\mathbb{R}}(f)}$.
3. Montrer que l'implication $I : A_{\mathbb{R}}(f) \ \Rightarrow \ B_{\mathbb{R}}(f)$ est vraie.
4. Enoncer la réciproque, la négation et la contraposée de cette implication.
5. On considère E la fonction partie entière i.e. la fonction qui à tout réel x renvoie l'unique entier k vérifiant $k \leqslant x < k+1$ *(on admet pour chaque x l'existence et l'unicité d'un tel entier k).*
   (a) Tracer le graphe de E sur $[-3; 3]$.
   (b) i. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $k = E(x)$. Encadrer $x+1$ par deux entiers, en déduire $E(x+1)$ en fonction de $E(x)$.
      ii. Montrer que $B_{\mathbb{R}}(E)$ est vraie.
   (c) Quelle est la valeur de vérité $A_{\mathbb{R}}(E)$?
6. Que peut-on en déduire concernant l'équivalence $A_{\mathbb{R}}(f) \ \Leftrightarrow \ B_{\mathbb{R}}(f)$?

Partie 2 : Les fonctions sur $\mathbb{N}$

Pour $f \in \mathscr{F}(\mathbb{N},\mathbb{N})$, on considère les assertions suivantes :

$$A_{\mathbb{N}}(f) \ : \qquad \text{« } \forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, \quad [n < p] \ \Rightarrow \ [f(n) < f(p)] \text{ »}$$
$$B_{\mathbb{N}}(f) \ : \qquad \text{« } \forall n \in \mathbb{N}, \quad [f(n+1) > f(n)] \text{ »}$$

Soit $f \in \mathscr{F}(\mathbb{N},\mathbb{N})$. On admet que $A_{\mathbb{N}}(f) \ \Rightarrow \ B_{\mathbb{N}}(f)$. On souhaite démontrer la réciproque.

7. Donner une exemple de fonction f vérifiant $A_{\mathbb{N}}(f)$.
8. Soit $f \in \mathscr{F}(\mathbb{N},\mathbb{N})$. On suppose $B_{\mathbb{N}}(f)$.
   (a) On fixe $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f(n+k) > f(n)$.
   (b) En déduire $A_{\mathbb{N}}(f)$.
9. Que peut-on en déduire concernant l'équivalence $A_{\mathbb{N}}(f) \ \Leftrightarrow \ B_{\mathbb{N}}(f)$?

Partie 3 : Une inéquation fonctionnelle

On cherche à déterminer l'ensemble des fonctions $f \in \mathscr{F}(\mathbb{N},\mathbb{N})$ vérifiant la condition suivante :

$$(\bigstar) \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad f(n+1) \geqslant f \circ f(n) + 1.$$

10. Déterminer une fonction f solution de $(\bigstar)$.

On fixe pour la suite $f \in \mathscr{F}(\mathbb{N},\mathbb{N})$ solution de $(\bigstar)$. On considère également pour tout $n \in \mathbb{N}$, le prédicat suivant :

$$A(n) : \text{« } \forall k \geqslant n, \ f(k) \geqslant n \text{ ».}$$

11. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $A(n)$ est vraie.
    (a) Soit $k \geqslant n+1$. On suppose que $f(k) = n$.
        i. A l'aide de $(\bigstar)$, montrer que $f \circ f(k-1) \leqslant n-1$.
        ii. A l'aide de $A(n)$ montrer que $f(k-1) \geqslant n$ puis que $f \circ f(k-1) \geqslant n$.
    (b) Justifier que $A(n+1)$ est vraie.
12. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A(n)$ est vraie.
13. Soit $n \in \mathbb{N}$.
    (a) Montrer que $f \circ f(n) \geqslant f(n)$.
    (b) En déduire que $f(n+1) > f(n)$.
    (c) Justifier que f est strictement croissante.
14. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $f(n) \geqslant n+1$.
    (a) Justifier que $f \circ f(n) \geqslant f(n+1)$.
    (b) Conclure à une contradiction.
15. Conclure que $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$.