Commentaires sur le Devoir Surveillé 1
Fonctions réelles - Logique

Problème I - Fonctions réelles

On considère la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{1+x+x^2} \end{array}.$$

Partie 1 : Etude de la fonction

1. Présentez bien la variable x. La non-nullité du polynôme x^2+x+1 nécessite le calcul de son discriminant.

2. Très très peu de bonnes réponses, ce n'est pas parce que la fonction **semble** ni paire ni impaire que c'est nécessairement le cas. On rappelle que pour être paire sur $\mathbb{R}$ par exemple il faut vérifier $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = f(x)$. Dont la négation est $\exists x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = f(x)$. Ceci ce démontre rigoureusement en trouvant explicitement un x qui fonctionne (cf corrigé). Notamment certains ont écrit $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) \neq f(x)$ ce qui est faux puisque bien sûr $f(-0) = f(0)$.

3. Puisque le résultat est donné, on attendait de vous que vous donniez un minimum d'explications. Les rapports du jury insistent sur le fait que lorsque le résultat est donné, il faut développer le raisonnement pour y parvenir et non pas se contenter de dire qu'il est vrai.

4. Plutôt bien globalement. Vous avez été nombreux à bien me détailler le calcul des limites. Pour les autres, allez voir le corrigé. N'oubliez pas de justifier d'abord vos calculs PUIS de donner le tableau de variations (et non l'inverse).

5. J'enlevais la moitié des points si vous ne justifiez pas en citant la valeur de la limite en $+\infty$. Plutôt bien réussie.

6. De belles réponses avec l'invocation du corollaire du théorème des valeurs intermédiaires mais parfois des confusions entre x et m. Attention à bien discuter aussi sur le cas $m \notin \left]0; \frac{4}{3}\right]$. Le cas $m = \frac{4}{3}$ est aussi un cas particulier à traiter à part. N'oubliez pas d'encadrer chacun de vos résultats.

7. Attention, il n'y avait pas une mais trois questions ici. Il faut bien répondre à chacune d'elle.

8. (a) Plutôt bien réussie. La conclusion n'est pas la valeur de $f\left(x - \frac{1}{2}\right)$ mais l'égalité des deux images.
   (b) Agréablement surpris, je pensais que la question vous poserait plus de difficultés mais vous avez été nombreux à voir ce qu'il se passait. Un coup d'oeil sur le tableau de variations pouvait aider.

9. Ok ne pas hésiter à rappeler que la fonction f est dérivable en 0 puis il était important de donner la formule générale de la tangente avant de l'appliquer au cas particulier de $a = 0$.

10. Ne faites pas des dessins trop écrasés ou petits. N'oubliez pas de tracer la tangente et vérifiez que vos données précédentes sont cohérentes entre elles.

Partie 2 : Etude de la dérivée

On pose

$$g = f' : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -\frac{1+2x}{(1+x+x^2)^2} \end{array}.$$

11. Ici commence les difficultés. N'oubliez pas de justifier que g est dérivable sur $\mathbb{R}$. Ou bien en rappelant que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left(1+x+x^2\right)^2 \neq 0$ ou bien en argumentant que g est le quotient de deux polynômes dont le dénominateur ne s'annule pas. Beaucoup trop d'erreurs dans les calculs ! Ce qui vous empêchait pratiquement de faire toute la partie 2. Prenez vraiment le réflexe de factoriser dès que possible cela simplifie grandement les calculs. A se ré-entrainer avec le corrigé.

12. Nécessitait d'avoir le bon résultat à la question précédente. Inutile de chercher un discriminant pour le polynôme $3x^2+3x$ car sa forme factorisée $3x\,(x+1)$ retourne directement ses deux racines 0 et -1. Vérifiez bien que votre tableau de variations est bien cohérent avec les valeurs des extrema et des bords. Notamment croitre strictement de 0 à 0 est compliqué...

13. Même parmi ceux qui sont arrivés jusqu'ici de grosses lacunes sur ces notions. Notamment sur l'image réciproque. A bien retravailler pour tout le monde.

14. (a) Toujours de nombreuses erreurs de calcul. Inutile de développer le dénominateur pour observer que l'un est l'opposé de l'autre.
    (b) Moins bien réussi, mais quelques bonnes réponses.

15. Aïe ! ! ! Oui c'est un peu calculatoire, mais en prenant soin d'y aller petit à petit rien de très insurmontable. Il faut encore s'entrainer sur les calculs de dérivées. Toujours en factorisant au maximum. Question bien dotée pour ceux qui y parvenaient.

Partie 3 : Une suite définie par récurrence

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$u_0 = 1, \qquad u_{n+1} = f\circ f\,(u_n)\,.$$

16. Facile, pas toujours réussie.

17. Un classique à connaître. Bien introduire la fonction $j : x \mapsto x^3+x^2+x-1$, citer les hypothèses du théorèmes, notamment que $0 \in \left]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) ; \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[$ souvent négligé.

18. Bien revoir la rédaction sur le raisonnement. Notamment l'hypothèse de croissance doit apparaître.

19. Peu tentée, jamais réussie, question plus dure.

20. Non traitée. Dommage c'était une petite récurrence.

21. Très peu traitée. Ne partez pas dans de grande considération de dérivation, considérez plutôt que c'est la composée de deux fonctions croissantes. Cf corrigé pour la rédaction.

22. Non traitée.

Problème II - Logique

On note $\mathscr{F}(\mathbb{N},\mathbb{N})$ l'ensemble des fonctions sur $\mathbb{N}$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ et $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ celui des fonctions sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Partie 1 : Les fonctions réelles

Pour $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on considère les assertions suivantes :

$$\begin{array}{ll} A_{\mathbb{R}}(f) : & \text{« } \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad [x<y] \Rightarrow [f(x)<f(y)] \text{ »} \\ B_{\mathbb{R}}(f) : & \text{« } \forall x\in\mathbb{R},\quad [f(x+1)>f(x)] \text{ »} \end{array}$$

Soit $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

1. Bien sûr, piège grossier il s'agissait des fonctions strictement croissantes et non juste croissantes. Pour l'exemple souhaité, soyez attentif, on voulait une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$ tout entier donc la fonction carrée par exemple ou logarithme n'est pas une réponse. Encadrez votre résultat !

2. Une erreur ici n'est pas admissible (et pourtant il y en a eu...). Il s'agit simplement d'appliquer le cours mais vous êtes encore trop nombreux à ne pas connaître la négation d'une implication. Attention à la gestion des inégalités stricte et large également.

3. La correction fut assez tolérante ici. Pourtant la rédaction est souvent bancale : pour montrer une implication on suppose $A_{\mathbb{R}}(f)$ et on cherche à démontrer $B_{\mathbb{R}}(f)$. La supposition de $A_{\mathbb{R}}(f)$ apparaît peu dans vos copies. Vous faites comme si mais sans le dire ce qui rend votre raisonnement confus. De même, une fois que vous avez démontré que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+1) > f(x)$ précisez bien que $B_{\mathbb{R}}(f)$ est démontré. Puis n'oubliez pas de conclure. Enfin, dans la démonstration le fait de prendre $y = x + 1$ était attendu. A bien retravailler même si le barème vous a été favorable.

4. Faîtes des phrases ! Le correcteur n'est pas un robot. Donc dire « Réciproque : » n'est pas une rédaction. C'est du cours, donc interdit de s'y tromper...

5. On considère E la fonction partie entière i.e. la fonction qui à tout réel x renvoie l'unique entier k vérifiant $k \leqslant x < k+1$ *(on admet pour chaque x l'existence et l'unicité d'un tel entier k).*

   (a) Bof j'ai vu des escaliers, ce qui ne correspond pas au graphe d'une fonction. Il était important pour chaque entier de montrer sa valeur en excluant le bord de la fin de chaque plateau. Des erreurs dans les négatifs.

   (b) i. Une rédaction souvent confuse. Notamment ne parlez pas de $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall k \in \mathbb{Z}$ alors que ces deux variables ont été fixées par l'énoncé.

   ii. Là aussi, la question étant facile, soyez clairs sur la rédaction et le raisonnement.

   (c) Plus d'erreurs dans cette question mais aussi beaucoup de bonnes réponses.

6. Ne soyez pas expéditif dans votre réponse, justifiez bien pourquoi cette équivalence est fausse.

Partie 2 : Les fonctions sur $\mathbb{N}$

Pour $f \in \mathscr{F}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$, on considère les assertions suivantes :

$$A_{\mathbb{N}}(f) : \quad « \forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, \quad [n < p] \Rightarrow [f(n) < f(p)] »$$
$$B_{\mathbb{N}}(f) : \quad « \forall n \in \mathbb{N}, \quad [f(n+1) > f(n)] »$$

Soit $f \in \mathscr{F}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$. On admet que $A_{\mathbb{N}}(f) \Rightarrow B_{\mathbb{N}}(f)$. On souhaite démontrer la réciproque.

7. Question gentille car un peu redondante avec la question 1. Attention, il fallait bien parler d'une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Par exemple la fonction $f : n \mapsto n-1$ ne fonctionne pas car $f(0) \notin \mathbb{N}$.

8. Soit $f \in \mathscr{F}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$. On suppose $B_{\mathbb{N}}(f)$.

   (a) Beaucoup trop d'arnaques, aucune réponse juste. Vous avez vu parfois qu'il fallait faire une récurrence mais vous êtes très confus sur les variables k et n. L'entier n est **FIXE** c'est marqué dans l'énoncé. Donc la récurrence devait uniquement porter sur k sans toucher à n. A bien revoir, quelques forçages.

   (b) Question subtile. Vous avez souvent vu qu'il fallait prendre $p = n+k$ mais en réalité c'est l'inverse, il fallait d'abord prendre p **quelconque** puis définir k et utiliser la question précédente.

9. Même remarque qu'avant, justifiez au minimum votre réponse.

Partie 3 : Une inéquation fonctionnelle

On cherche à déterminer l'ensemble des fonctions $f \in \mathscr{F}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ vérifiant la condition suivante :

$$(\bigstar) \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad f(n+1) \geqslant f \circ f(n) + 1.$$

10. Quelques réponses justes. Rien de bien méchant ici.

On fixe pour la suite $f \in \mathscr{F}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ solution de $(\bigstar)$. On considère également pour tout $n \in \mathbb{N}$, le prédicat suivant :

$$A(n) : \text{« } \forall k \geqslant n,\ f(k) \geqslant n \text{ »}.$$

Partie très peu traitée et jamais avec succès. Un peu plus dure elle mérite cependant d'être retravaillée avec le corrigé.