Corrigé du Devoir Surveillé 1
Logique & Fonctions réelles

Problème I - Fonctions réelles

On considère la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{1+x+x^2}. \end{array}$$

Partie 1 : Etude de la fonction

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$f(x) \text{ existe} \quad \Leftrightarrow \quad 1+x+x^2 \neq 0.$$

Soit Δ le discriminant de $1+x+x^2$. On a $\Delta = 1-4 = -3 < 0$. Donc $x \mapsto 1+x+x^2$ est de signe constante sur $\mathbb{R}$ (celui de x^2) et est strictement positif sur $\mathbb{R}$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1+x+x^2 \neq 0$ i.e. pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ existe. Conclusion,

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}.}$$

2. L'ensemble $\mathbb{R}$ est bien centré en 0, pour autant, montrons que f n'est ni paire ni impaire. On a

$$f(0) = 1 \neq -1 = -f(0).$$

Donc f n'est pas impaire. De plus,

$$f(1) = \frac{1}{1+1+1} = \frac{1}{3} \qquad \text{et} \qquad f(-1) = \frac{1}{1-1+1} = 1.$$

Donc $f(-1) \neq f(1)$ et f n'est donc pas paire. Conclusion,

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ n'est ni paire ni impaire.}}$$

3. La fonction f est dérivable sur son domaine de définition et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = -\frac{\left(1+x+x^2\right)'}{\left(1+x+x^2\right)^2} = -\frac{1+2x}{1+x+x^2}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -\frac{1+2x}{1+x+x^2}.}$$

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. Puisque $1+x+x^2 > 0$, on a

$$f'(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad -(1+2x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1+2x < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < -\frac{1}{2}.$$

Et de même $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}$. Donc la fonction f est strictement croissante sur $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right]$ et est strictement décroissante sur $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[$. De plus,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}.$$

Ainsi, on obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
f	0 $\nearrow$	$\frac{4}{3}$	$\searrow$ 0

5. Nous avons vu que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. On en déduit directement que

$$\boxed{\text{la droite horizontale d'équation } y = 0 \text{ est asymptote au graphe de la fonction } f.}$$

6. Par le tableau précédent, on en déduit que

   - Si $m \in \left]-\infty;0\right] \cup \left]\frac{4}{3};+\infty\right[$, alors l'équation $f(x) = m$ n'admet aucune solution.
   - Si $m \in \left]0;\frac{4}{3}\right]$ alors l'équation $f(x) = m$ admet deux solutions (l'une dans $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right[$ et l'autre dans $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$).
   - Si $m = \frac{4}{3}$ alors l'équation $f(x) = m$ admet une unique solution (qui est $x = -\frac{1}{2}$ bien entendu).

7. Par le tableau de variations précédent, on en déduit également que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad 0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{4}{3}.$$

Conclusion, la fonction f est majorée (par $\frac{4}{3}$), minorée (par 0 mais n'admet pas de minimum !) et donc est bornée.

8. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a d'une part,

$$f\left(x - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{1 + x - \frac{1}{2} + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{x + \frac{1}{2} + x^2 - x + \frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4} + x^2}.$$

D'autre part,

$$f\left(-x - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{1 - x - \frac{1}{2} + \left(-x - \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{2} - x + + \left(x + \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{2} - x + x^2 + x + \frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4} + x^2}.$$

Conclusion,

$$\boxed{f\left(x - \frac{1}{2}\right) = f\left(-x - \frac{1}{2}\right).}$$

(b) La relation précédente étant vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$, on en déduit que les images de part et d'autre de la droite verticale $x_0 = -\frac{1}{2}$ sont égales. Conclusion,

$$\boxed{\text{Le graphe de } f \text{ est symétrique par rapport à la symétrie axiale d'axe } x = -\frac{1}{2}.}$$

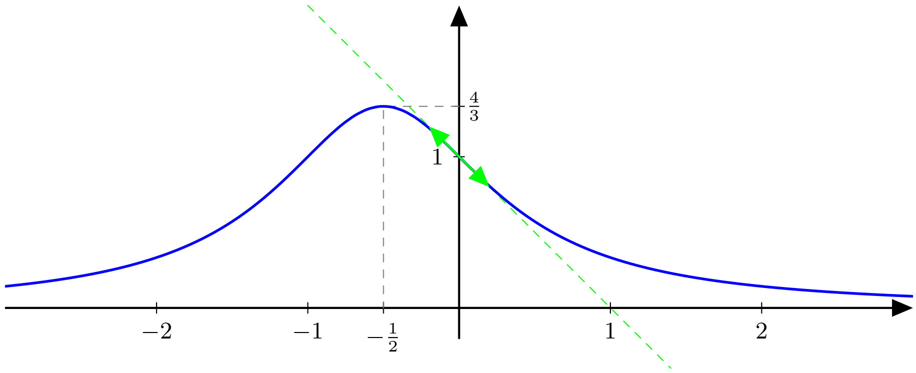
9. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc en 0. Ainsi l'équation de la tangente au graphe de f au point $x_0 = 0$ est donnée par $y = f'(0)\,(x - 0) + f(0)$. Or,

$$f'(0) = -1 \qquad \text{et} \qquad f(0) = 1.$$

Conclusion, l'équation de la tangente est

$$\boxed{y = -x + 1.}$$

10. On en déduit le graphe suivant où la tangente en 0 y apparaît en vert.



Partie 2 : Etude de la dérivée

On pose

$$g = f' : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -\frac{1+2x}{(1+x+x^2)^2}. \end{array}$$

11. On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 + x + x^2 \neq 0$ donc la fonction g est bien définie et même dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\frac{2\left(1+x+x^2\right)^2 - (1+2x)\,2\,(1+2x)\left(1+x+x^2\right)}{\left(1+x+x^2\right)^4} \\ &= -\frac{2\left(1+x+x^2\right) - (1+2x)\,2\,(1+2x)}{\left(1+x+x^2\right)^3} && \text{car } 1+x+x^2 \neq 0 \\ &= -\frac{2+2x+2x^2 - 2\left(1+4x+4x^2\right)}{\left(1+x+x^2\right)^3} \\ &= -\frac{-6x-6x^2}{\left(1+x+x^2\right)^3} \\ &= \frac{6x\,(1+x)}{\left(1+x+x^2\right)^3}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = \frac{6x\,(1+x)}{\left(1+x+x^2\right)^3}.}$$

12. Soit $x \in \mathbb{R}$. Par la question précédente, on a

$$\begin{aligned} g'(x) > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{6x\,(1+x)}{\left(1+x+x^2\right)^3} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x\,(1+x) > 0 && \text{car } 1+x+x^2 > 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x < -1 \ \text{ OU } \ x > 0. \end{aligned}$$

De même, on a $g'(x) < 0 \ \Leftrightarrow \ x \in \,]-1;0[$. On en déduit donc que g est strictement croissante sur $]-\infty;-1]$, strictement décroissante sur $[-1;0]$ et strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

De plus,

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} -\frac{1+2x}{\left(1+x+x^2\right)^2} = \lim_{x\to-\infty} -\frac{2x}{\left(x^2\right)^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{x^3} = 0.$$

De même,

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x^3} = 0.$$

Enfin, $g(-1) = -\frac{1-2}{(1-1+1)^2} = 1$ et $g(0) = -1$. Conclusion, on obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
g	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0

13. On observe que $g\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1-1}{\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)^2} = 0$ et $g(1) = -\frac{3}{(1+1+1)^2} = -\frac{1}{3}$. On complète donc notre tableau précédent :

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		0		1		$+\infty$
g	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$-\frac{1}{3}$	$\nearrow$	0

On en déduit les images directes :

$$\boxed{g\left(\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right]\right) = [0;1], \qquad g\left(]-1;1[\right) = [-1;1[\,.}$$

et les images réciproques :

$$\boxed{g^{\leftarrow}\left(\mathbb{R}_+\right) = \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right], \qquad g^{\leftarrow}\left(]-1;0]\right) = \left[-\frac{1}{2}; 0\right[\cup]0; +\infty[\,.}$$

14. (a) Pour tout $u \in \mathbb{R}$, $g(u) = -\left(1+2u\right)\left(f(u)\right)^2$. Par conséquent, pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$g\left(x-\frac{1}{2}\right) = -\left(1+2x-1\right)\left(f\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)^2 = -2x\left(f\left(-x-\frac{1}{2}\right)\right)^2 \qquad \text{par la question 8.a.}$$

D'autre part, on a

$$g\left(-x-\frac{1}{2}\right) = -\left(1-2x-1\right)\left(f\left(-x-\frac{1}{2}\right)\right)^2 = 2x\left(f\left(-x-\frac{1}{2}\right)\right)^2.$$

Conclusion,

$$\boxed{g\left(x-\frac{1}{2}\right) = -g\left(-x-\frac{1}{2}\right).}$$

(b) On en déduit que

le point de coordonnées $\left(-\frac{1}{2}, g\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \left(-\frac{1}{2},;0\right)$ est un centre de symétrie pour le graphe de g.

15. On pose $h = g'$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, par la question 11., on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \frac{6x\left(1+x\right)}{\left(1+x+x^2\right)^3}.$$

Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1+x+x^2 \neq 0$, la fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
h'(x) &= \frac{(6x(1+x))'\left(1+x+x^2\right)^3 - 6x(1+x)\left[\left(1+x+x^2\right)^3\right]'}{\left(1+x+x^2\right)^6} \\
&= 6\frac{(1+x+x)\left(1+x+x^2\right)^3 - x(1+x)\,3\,(1+2x)\left(1+x+x^2\right)^2}{\left(1+x+x^2\right)^6} \\
&= 6\frac{(1+2x)\left(1+x+x^2\right) - x(1+x)\,3\,(1+2x)}{\left(1+x+x^2\right)^4} \qquad \text{car } 1+x+x^2 \neq 0 \\
&= \frac{6(1+2x)\left(1+x+x^2-3x(1+x)\right)}{\left(1+x+x^2\right)^4} \\
&= \frac{6(1+2x)\left(1-2x-2x^2\right)}{\left(1+x+x^2\right)^4}.
\end{aligned}$$

So easy ! Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad h'(x) = \frac{6(1+2x)\left(1-2x-2x^2\right)}{\left(1+x+x^2\right)^4}.}$$

Partie 3 : Une suite définie par récurrence

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$u_0 = 1, \qquad u_{n+1} = f \circ f(u_n).$$

16. On a les égalités entre réels suivantes :

$$u_1 = f \circ f(u_0) = f(f(1)) = f\left(\frac{1}{1+1+1}\right) = f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}} = \frac{1}{\frac{9+3+1}{9}} = \frac{9}{13}.$$

Conclusion,

$$\boxed{u_1 = \frac{9}{13}.}$$

17. Posons $a : x \mapsto x^3+x^2+x-1$. La fonction a est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad a'(x) = 3x^2+2x+1.$$

Soit Δ le discriminant associé à ce trinôme : $\Delta = 4 - 4 \times 3 = -8 < 0$. Donc la fonction a' est de signe constant et même strictement positive. Donc la fonction a est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus $\lim\limits_{x\to+\infty} a(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} a(x) = -\infty$. On a donc

- $0 \in \left]\lim\limits_{x\to-\infty} a(x); \lim\limits_{x\to+\infty} a(x)\right[$
- a est continue sur $\mathbb{R}$
- a est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Donc par le corollaire des valeurs intermédiaires (ou le théorème de la bijection), on en déduit que l'équation $a(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$:

$$\boxed{\text{L'équation } x^3+x^2+x-1=0 \text{ admet une unique solution dans } \mathbb{R}.}$$

On note α cette solution.

18. On a
$$a\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{27}+\frac{1}{9}+\frac{1}{3}-1=\frac{1+3+9-27}{27}=-\frac{14}{27}$$
et
$$a(1)=1+1+1-1=2.$$
Donc $a\left(\frac{1}{3}\right)<0=a(\alpha)<a(1)$. Donc par la stricte croissance de a, on obtient que $\alpha\in\left]\frac{1}{3};1\right[$ donc a fortiori
$$\boxed{\alpha\in\left[\frac{1}{3};1\right].}$$

19. La fonction f est continue et strictement décroissante sur $\left[-\frac{1}{2};+\infty\right[$ et $[\alpha;1]\subseteq\left[-\frac{1}{2};+\infty\right[$. Donc
$$f([\alpha;1])=[f(1);f(\alpha)].$$
Or $f(1)=\frac{1}{3}$. Précisons $f(\alpha)$. Par définition de α, on a
$$\begin{aligned}0=a(\alpha)=\alpha^3+\alpha^2+\alpha-1 \quad&\Leftrightarrow\quad \alpha\left(\alpha^2+\alpha+1\right)=1\\ &\Leftrightarrow\quad \alpha=\frac{1}{1+\alpha+\alpha^2} \qquad \text{car } 1+\alpha+\alpha^2 \text{ n'est jamais nul.}\end{aligned}$$
Ainsi, $\alpha=f(\alpha)$. D'où
$$f([\alpha;1])=\left[\frac{1}{3};\alpha\right].$$
Poursuivons. $\left[\frac{1}{3};\alpha\right]\subseteq\left[-\frac{1}{2};+\infty\right[$. Donc f est continue et strictement décroissante sur $\left[\frac{1}{3};\alpha\right]$. Donc
$$f\left(\left[\frac{1}{3};\alpha\right]\right)=\left[f(\alpha);f\left(\frac{1}{3}\right)\right]=\left[\alpha;\frac{9}{13}\right] \qquad \text{par la question 16..}$$
Donc
$$f\circ f([\alpha;1])=f\left(\left[\frac{1}{3};\alpha\right]\right)=\left[\alpha;\frac{9}{13}\right]\subseteq[\alpha;1].$$
Conclusion, le segment $[\alpha;1]$ est stable par $f\circ f$,
$$\boxed{f\circ f([\alpha;1])\subseteq[\alpha;1].}$$

20. Procédons par récurrence. Posons pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$: « $u_n\in[\alpha;1]$ ».

Initialisation. Si $n=0$, alors $u_0=1\in[\alpha;1]$. Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n\in\mathbb{N}$. Montrons que $\mathscr{P}(n)\Rightarrow\mathscr{P}(n+1)$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie i.e. $u_n\in[\alpha;1]$. Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est alors aussi vraie i.e. montrons que $u_{n+1}\in[\alpha;1]$. Par construction de u_{n+1}, on a
$$u_{n+1}=f\circ f(u_n).$$
Or par hypothèse de récurrence, $u_n\in[\alpha;1]$. Donc
$$u_{n+1}=f\circ f(u_n)\in f\circ f([\alpha;1])\subseteq[\alpha;1] \qquad \text{par la question précédente.}$$
Donc $u_{n+1}\in[\alpha;1]$ et donc $\mathscr{P}(n+1)$ est aussi vraie.

Conclusion, pour tout $n\in\mathbb{N}$, la propriété $\mathscr{P}(n)$ est vraie :
$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n\in[\alpha;1].}$$

21. Soit $(x,y) \in [\alpha;1]^2$ tel que $x \leqslant y$. Puisque f est décroissante sur $[\alpha;1]$, on a

$$\alpha \leqslant x \leqslant y \leqslant 1 \qquad \Rightarrow \qquad f(\alpha) = \alpha \geqslant f(x) \geqslant f(y) \geqslant f(1) = \frac{1}{3}.$$

Dès lors, $x' = f(x)$ et $y' = f(y)$ sont deux réels appartenant à $\left[\frac{1}{3};\alpha\right]$ et vérifiant $y' \leqslant y'$. Or f est décroissante sur $\left[\frac{1}{3};\alpha\right]$ donc :

$$x' = f(x) \geqslant y' = f(y) \qquad \Rightarrow \qquad f \circ f(x) \leqslant f \circ f(y).$$

Globalement, nous avons bien établi que pour tout $(x,y) \in [\alpha;1]^2$, $x \leqslant y \;\Rightarrow\; f \circ f(x) \leqslant f \circ f(y)$. Conclusion,

$$\boxed{f \circ f \text{ est croissante sur } [\alpha;1].}$$

22. Procédons à nouveau par récurrence. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$: « $u_{n+1} \leqslant u_n$ ».

Initialisation. Si $n = 0$, alors, par la question 16. $u_1 = \frac{9}{13} \leqslant 1 = u_0$. Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie i.e. $u_{n+1} \leqslant u_n$. Montrons alors que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie i.e. $u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$. Par hypothèse de récurrence, on a $u_{n+1} \leqslant u_n$. De plus, par la question 20. on sait que $(u_{n+1}, u_n) \in [\alpha;1]$. Or la fonction $f \circ f$ est croissante sur $[\alpha;1]$. Par conséquent,

$$u_{n+1} \leqslant u_n \qquad \Rightarrow \qquad f \circ f\left(u_{n+1}\right) \leqslant f \circ f\left(u_n\right).$$

Donc par définition de la suite, $u_{n+2} = f \circ f\left(u_{n+1}\right) \leqslant f \circ f\left(u_n\right) = u_{n+1}$ ce qui démontre $\mathscr{P}(n+1)$.

Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie :

$$\boxed{\text{La suite } \left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$$

Nous avons donc établi que $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par α. Conclusion, par le théorème de convergence monotone,

$$\boxed{\text{La suite } \left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge.}}$$

Nous verrons au second semestre que nécessairement cette limite est α et que nous pouvons même établir que la vitesse de convergence de $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ vers α est très rapide (géométrique). Problème a terminer dans 4 mois !

Problème II - Logique

On note $\mathscr{F}(\mathbb{N},\mathbb{N})$ l'ensemble des fonctions sur $\mathbb{N}$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ et $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ celui des fonctions sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Partie 1 : Les fonctions réelles

Pour $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on considère les assertions suivantes :

$$\begin{aligned} A_{\mathbb{R}}(f) :& \quad \text{« } \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad [x < y] \Rightarrow [f(x) < f(y)] \text{ »} \\ B_{\mathbb{R}}(f) :& \quad \text{« } \forall x \in \mathbb{R}, \quad [f(x+1) > f(x)] \text{ »} \end{aligned}$$

Soit $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

1. $\boxed{\text{L'assertion } A_{\mathbb{R}}(f) \text{ correspond au fait d'être } \textbf{strictement} \text{ croissante.}}$

$\boxed{\text{Par exemple la fonction identité ou la fonction exponentielle sont strictement croissantes sur } \mathbb{R}.}$

2. On a les négations suivantes :

$$\boxed{\overline{A_{\mathbb{R}}(f)} : \qquad \text{« } \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad [x < y] \quad \text{ET} \quad [f(x) \geqslant f(y)] \text{ »}}$$

et

$$\boxed{\overline{B_{\mathbb{R}}(f)} : \qquad \text{« } \exists x \in \mathbb{R}, \quad [f(x+1) \leqslant f(x)] \text{ . »}}$$

3. Montrons $I : A_{\mathbb{R}}(f) \Rightarrow B_{\mathbb{R}}(f)$. Supposons $A_{\mathbb{R}}(f)$ vraie. Montrons que $B_{\mathbb{R}}(f)$ l'est également. Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $y = x + 1$. Puisque $y > x$, par $A_{\mathbb{R}}(f)$, on a

$$f(x+1) = f(y) > f(x)$$

ceci étant vrai pour $x \in \mathbb{R}$ quelconque, on en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x+1) > f(x).$$

Donc $B_{\mathbb{R}}(f)$ est vraie. Conclusion,

$$\boxed{I : A_{\mathbb{R}}(f) \Rightarrow B_{\mathbb{R}}(f) \text{ est vraie.}}$$

4. La réciproque de I est donnée par

$$\boxed{B_{\mathbb{R}}(f) \Rightarrow A_{\mathbb{R}}(f).}$$

Sa négation :

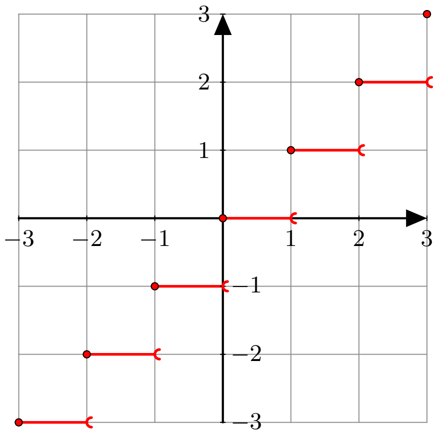
$$\boxed{B_{\mathbb{R}}(f) \quad \text{ET} \quad \overline{A_{\mathbb{R}}(f)}.}$$

Sa contraposée :

$$\boxed{\overline{A_{\mathbb{R}}(f)} \Rightarrow \overline{B_{\mathbb{R}}(f)}.}$$

5. On considère E la fonction partie entière i.e. la fonction qui à tout réel x renvoie l'unique entier k vérifiant $k \leqslant x < k + 1$ *(on admet pour chaque x l'existence et l'unicité d'un tel entier k).*

(a) Nous en reparlerons au chapitre 5, la graphe de la partie entière est donné par



(b) i. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $k = E(x)$. On a $k \leqslant x < k + 1$. Donc,

$$\boxed{k + 1 \leqslant x + 1 < k + 2.}$$

Ou encore en posant $k' = k + 1$, on a $k' \leqslant x + 1 < k' + 1$. Donc par définition, on a $E(x+1) = k' = k + 1$. Or $k = E(x)$. Conclusion,

$$\boxed{E(x+1) = E(x) + 1.}$$

ii. Par la question précédente,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad E(x+1) = E(x)+1 > E(x).$$

Conclusion,

$$\boxed{B_{\mathbb{R}}(E) \text{ est vraie.}}$$

(c) On observe que $E(0) = 0 = E\left(\frac{1}{2}\right)$. Donc

$$\left[0 < \frac{1}{2}\right] \quad \text{ET} \quad \left[E(0) \geqslant E\left(\frac{1}{2}\right)\right]$$

Ainsi, par 2., on retrouve bien $\overline{A_{\mathbb{R}}(E)}$. Conclusion,

$$\boxed{A_{\mathbb{R}}(E) \text{ est fausse.}}$$

6. Par la question précédente, on observe que E est un exemple de fonction pour laquelle $B_{\mathbb{R}}(E)$ est vraie et $A_{\mathbb{R}}(E)$ est fausse. Donc

$$B_{\mathbb{R}}(f) \;\Rightarrow\; B_{\mathbb{R}}(f) \text{ est fausse en général.}$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{L'équivalence } A_{\mathbb{R}}(f) \;\Leftrightarrow\; B_{\mathbb{R}}(f) \text{ est fausse.}}$$

Partie 2 : Les fonctions sur $\mathbb{N}$

Pour $f \in \mathscr{F}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$, on considère les assertions suivantes :

$$\begin{array}{ll} A_{\mathbb{N}}(f) : & \text{« } \forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, \quad [n < p] \;\Rightarrow\; [f(n) < f(p)] \text{ »} \\ B_{\mathbb{N}}(f) : & \text{« } \forall n \in \mathbb{N}, \quad [f(n+1) > f(n)] \text{ »} \end{array}$$

Soit $f \in \mathscr{F}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$. On admet que $A_{\mathbb{N}}(f) \;\Rightarrow\; B_{\mathbb{N}}(f)$. On souhaite démontrer la réciproque.

7. La fonction $\boxed{\mathrm{Id}_{\mathbb{N}} \text{ vérifie } A_{\mathbb{N}}(f)}$ en effet

$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, \quad [n < p] \;\Rightarrow\; [\mathrm{Id}_{\mathbb{N}}(n) = n < p = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}(p).] \,.$$

8. Soit $f \in \mathscr{F}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$. On suppose $B_{\mathbb{N}}(f)$.

(a) On fixe $n \in \mathbb{N}$. On procède par récurrence sur k. Posons pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(k)$: « $f(n+k) > f(n)$ ».
Initialisation. Si $k = 1$. Alors, en appliquant $B_{\mathbb{N}}(f)$ à n, on a $f(n+k) = f(n+1) > f(n)$. Donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.
Hérédité. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrons que $\mathscr{P}(k) \;\Rightarrow\; \mathscr{P}(k+1)$. Supposons $\mathscr{P}(k)$ vraie i.e. $f(n+k) > f(n)$. Montrons $\mathscr{P}(k+1)$ i.e. $f(n+k+1) > f(n)$. En appliquant $B_{\mathbb{N}}(f)$ à $n' = n+k$, on a

$$f(n+k+1) > f(n+k)\,.$$

Or par hypothèse de récurrence, $f(n+k) > f(n)$. D'où,

$$f(n+k+1) > f(n).$$

Donc $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.
Conclusion, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(k)$ est vraie et donc

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad f(n+k) > f(n).}$$

(b) Soit $(n, p) \in \mathbb{N}$. On suppose que $n < p$. Dès lors, $k = p - n > 0$ donc $k \in \mathbb{N}^*$. Donc par la question précédente,

$$f(p) = f(n+k) > f(n).$$

Conclusion,

$$\boxed{A_{\mathbb{N}}(f) \text{ est vraie.}}$$

9. On a démontré à la question précédente que pour tout $f \in \mathscr{F}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$,

$$B_{\mathbb{N}}(f) \Rightarrow A_{\mathbb{N}}(f).$$

Or la réciproque est aussi vraie. Conclusion,

$$\boxed{\text{L'équivalence } A_{\mathbb{N}}(f) \Leftrightarrow B_{\mathbb{N}}(f) \text{ est vraie.}}$$

Partie 3 : Une inéquation fonctionnelle

On cherche à déterminer l'ensemble des fonctions $f \in \mathscr{F}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ vérifiant la condition suivante :

$$(\bigstar) \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad f(n+1) \geqslant f \circ f(n) + 1.$$

10. Posons $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f \circ f(n) + 1 = f(f(n)) + 1 = f(n) + 1 = n + 1 = f(n+1)$$

Donc, dans ce cas, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(n+1) \geqslant f \circ f(n) + 1$. Conclusion,

$$\boxed{\text{La fonction } f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}} \text{ est une solution de } (\bigstar).}$$

On fixe pour la suite $f \in \mathscr{F}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ solution de $(\bigstar)$. On considère également pour tout $n \in \mathbb{N}$, le prédicat suivant :

$$A(n) : \text{« } \forall k \geqslant n,\ f(k) \geqslant n \text{ ».}$$

11. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $A(n)$ est vraie.

(a) Soit $k \geqslant n+1$. On suppose que $f(k) = n$.

i. On applique $(\bigstar)$ en $n' = k - 1$. Dès lors,

$$\begin{aligned} f(k-1+1) \geqslant f \circ f(k-1) + 1 \quad &\Leftrightarrow \quad f(k) \geqslant f \circ f(k-1) + 1 \\ &\Leftrightarrow \quad f \circ f(k-1) \leqslant f(k) - 1. \end{aligned}$$

Or par hypothèse, $f(k) = n$. Conclusion,

$$\boxed{f \circ f(k-1) \leqslant n - 1.}$$

ii. Puisque $k \geqslant n+1$, on a $k' = k - 1 \geqslant n$. Donc par $A(n)$,

$$f(k') \geqslant n \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{f(k-1) \geqslant n.}$$

Posons alors $k'' = f(k-1)$. Puisque f atterrit dans $\mathbb{N}$, $k'' \in \mathbb{N}$ et par ce qui précède, $k'' \geqslant n$. Donc par $A(n)$ à nouveau,

$$f(k'') \geqslant n \quad \Leftrightarrow \quad f(f(k-1)) \geqslant n \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{f \circ f(k-1) \geqslant n}.$$

(b) Soit $k \geqslant n+1$. En particulier, $k \geqslant n$. Donc par $A(n)$, on a $f(k) \geqslant n$. Supposons que $f(k) = n$. Alors par la question précédente, on a Par la question précédente, on en déduit à la fois que $f \circ f(k-1) \leqslant n-1 < n$ et à la fois que $f \circ f(k-1) \geqslant n$ ce qui est contradictoire. Donc $f(k) \neq n$ et comme $f(k) \geqslant n$, on en déduit que $f(k) > n$. Or $f(k)$ est un entier (car f atterrit dans $\mathbb{N}$) donc $f(k) \geqslant n+1$. Ceci étant vrai pour $k \geqslant n+1$. Conclusion,

$$\boxed{A(n+1) \text{ est vraie.}}$$

12. Procédons par récurrence sur n.

Initialisation. Soit $n = 0$. Pour tout $k \geqslant 0$, on a par définition de f, $f(k) \in \mathbb{N}$ et donc $f(k) \geqslant 0$. Donc $A(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $A(n) \Rightarrow A(n+1)$. Supposons $A(n)$ vraie. Alors, on a démontré à la question précédente que $A(n+1)$ est vraie.

Conclusion, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ A(n) \text{ est vraie.}}$

13. Soit $n \in \mathbb{N}$.

(a) Puisque $k = f(n) \geqslant f(n) = n'$ et puisque f est à valeurs dans $\mathbb{N}$, $n' \in \mathbb{N}$. Alors par $A(n')$, on en déduit directement que

$$f(k) \geqslant n' \qquad \Leftrightarrow \qquad \boxed{f \circ f(n) \geqslant f(n)}.$$

(b) Par ($\bigstar$) on a $f(n+1) \geqslant f \circ f(n) + 1$. Donc par la question précédente,

$$\boxed{f(n+1) \geqslant f(n) + 1 > f(n).}$$

(c) Nous avons donc démontré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n+1) > f(n)$, autrement dit $B_{\mathbb{N}}(f)$ est vraie. Or par la partie 2, on sait que $A_{\mathbb{N}}(f) \Leftrightarrow B_{\mathbb{N}}(f)$. Donc $A_{\mathbb{N}}(f)$ est vraie i.e.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est strictement croissante.}}$$

14. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $f(n) \geqslant n+1$.

(a) Puisque $k = f(n) \geqslant n+1$, par $A(n+1)$, on a directement

$$\boxed{f \circ f(n) = f(k) \geqslant f(n+1).}$$

(b) Par ($\bigstar$) on sait que

$$f(n+1) \geqslant f \circ f(n) + 1 > f \circ f(n).$$

Donc par la question précédente, $\boxed{f(n+1) > f(n+1)}$, ce qui est bien sûr impossible.

15. Soit $n \in \mathbb{N}$. On déduit de la question précédente que l'hypothèse $f(n) \geqslant n+1$ est absurde. Donc $f(n) < n+1$. Or f est à valeurs dans $\mathbb{N}$ donc $f(n) \in \mathbb{N}$ et donc $f(n) \leqslant n$. Cependant en prenant $k = n \geqslant n$, par $A(n)$, on sait également que $f(n) \geqslant n$. D'où $f(n) = n$. Ceci étant vrai pour $n \in \mathbb{N}$ quelconque, on conclut que

$$\boxed{f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}.}$$