Epreuve de mathématiques 2
2020-2021

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé
Durée : 4h

Encadrer les résultats et numéroter les copies

Problème 1 - Fonctions réelles

On considère la fonction :

$$f: \quad x \mapsto \frac{\mathrm{e}^x}{1-\mathrm{e}^x}.$$

1. Déterminer $\mathcal{D}$ l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer proprement les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}$.
3. Déterminer la dérivée de f sur $\mathcal{D}$.
4. Déterminer le tableau de variation complet de f.
5. Pour tout $x \in \mathcal{D}$, exprimer $f'(x) - f(x)$ en fonction de $f(x)$ uniquement.
6. Montrer que f définit une bijection de $I = \mathbb{R}_-^*$ dans un intervalle J que l'on déterminera. On note $g = f^{-1}$ sa fonction réciproque.
7. Sans calculer g, montrer que g est dérivable sur J et montrer que pour tout $x \in J$,
$$g'(x) = \frac{1}{x\,(x+1)}.$$
8. Déterminer un couple de réel (a, b) tel que pour tout $x \in J$, $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$.
9. En déduire une expression de g sur J.
10. Retrouver le résultat de la question précédente par une autre méthode.

Problème 2 - Trigonométrie

Les parties sont dépendantes entre elles. La partie 4 ne dépend pas de la partie 3.

Partie 1 : la différence et le produit

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$D(x) = \cos(x) - \sin(x) \qquad \text{et} \qquad P(x) = \cos(x)\sin(x).$$

1. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer la forme polaire de $D(x)$.
   (b) Résoudre sur $\mathbb{R}$, l'inéquation $D(x) \geqslant 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
   (c) En déduire le signe de D sur $[0;\pi]$.
2. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Linéariser $P(x)$.
   (b) Résoudre sur $\mathbb{R}$, l'inéquation $P(x) \leqslant \frac{1}{4}$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
   (c) Déterminer le signe de P sur $[0;\pi]$.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimer $D(x)^2$ en fonction de $P(x)$ et en déduire $P(x)$ en fonction de $D(x)^2$.

Partie 2 : le produit de la différence et du produit

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$g(x) = P(x)D(x) = \cos(x)\sin(x)\left(\cos(x) - \sin(x)\right).$$

4. Préciser le signe de $g(x)$ sur $[0;\pi]$.
5. Soit $x \in \mathbb{R}$. Linéariser $g(x)$ i.e. montrer qu'il existe $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$g(x) = a\cos(3x) + b\sin(3x) + c\cos(x) + d\sin(x).$$

6. Soit $x \in \mathbb{R}$. A l'aide de la question 3., exprimer $g(x)$ en fonction de $D(x)$ uniquement.

Partie 3 : une fonction trigonométrique

On considère la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos^3(x) + \sin^3(x). \end{array}$$

7. Résoudre sur $\mathbb{R}$, l'équation $f(x) = 0$ puis préciser les solutions sur $[0;\pi]$.
8. Déterminer le tableau de variation de f sur $[0;\pi]$.
9. Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer $f(x-\pi)$.
10. En déduire le tableau de variation de f sur $[-\pi;0]$.

Partie 4 : une méthode tordue pour les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

On pose $a = \frac{\pi}{12}$.

11. Justifier que $\frac{\sqrt{3}-1}{2} \leqslant D(a) \leqslant 1$.
12. A l'aide des questions 5. et 6., montrer que

$$2D(a)^3 - 3D(a) + \sqrt{2} = 0.$$

13. Soit $u \in \mathbb{R}$. Développer $\left(u - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \left(u + \sqrt{2}\right)$.
14. En déduire que $D(a) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
15. A l'aide des questions 3. et 2.a calculer $P(a)$ par deux méthodes.
16. En déduire $(\cos(a) + \sin(a))^2$ puis $\cos(a)$ et $\sin(a)$.

Problème 3 - Complexes

On considère l'application complexe suivante :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} \setminus \{2i\} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \frac{2z-i}{z-2i} \end{array}$$

1. Calculer $f(-2)$.
2. (a) Calculer $f\left(\frac{-3+i}{2}\right)$.
   (b) Préciser sa forme polaire.
   (c) En déduire $\left(f\left(\frac{-3+i}{2}\right)\right)^{2021}$.
3. Déterminer $f^{\leftarrow}(\mathbb{U})$.

Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{2i\}$, on pose $g(z) = \operatorname{Im}(f(z))$.

4. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{2i\}$, $g(z) = \frac{3\operatorname{Re}(z)}{|z-2i|^2}$.
5. En déduire $f^{\leftarrow}(\mathbb{R})$.
6. Déterminer $A = \left\{ \theta \in \mathbb{R} \,\middle|\, 2\,\mathrm{e}^{i\theta} \neq 2i \right\}$.
7. Soit $\theta \in A$ et $z = 2\,\mathrm{e}^{i\theta}$.
   (a) Montrer que $|z-2i|^2 = 16\sin^2\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$.
   (b) En déduire $g(z)$ en fonction de θ.
8. En déduire $g(-2)$, est-ce cohérent avec la question 1. ?
9. Soit $\omega \in \mathbb{C}$. Résoudre, suivant les valeurs de ω, les solutions de l'équation $\omega = f(z)$, d'inconnue $z \in \mathbb{C} \setminus \{2i\}$.
10. Justifier que f définit une bijection de $\mathbb{C} \setminus \{2i\}$ dans un ensemble que l'on déterminera et préciser f^{-1}.
11. Calculer $f^{-1}(1-i)$. Est-ce cohérent avec la question 2.a ?

Problème 4 - Complexes

On cherche à déterminer l'ensemble suivant :

$$E = \left\{ (a,b) \in \mathbb{C}^2 \,\middle|\, \forall z \in \mathbb{U},\ z^2 + az + b \in \mathbb{U} \right\}.$$

1. Montrer que $(0,0) \in E$.
2. (a) A quel ensemble de points du plan complexe correspond $\mathscr{D}_1 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z-1| \leqslant 1 \}$?
   (b) Représenter en bleu $\mathscr{D}_1$ et en vert $\mathscr{D}_2 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z+1| \leqslant 1 \}$.
   (c) Préciser alors directement $\mathscr{D}_1 \cap \mathscr{D}_2$.
3. Montrer que pour tout $(u,v) \in \mathbb{C}^2$, $\begin{cases} u+v \in \mathbb{U} \\ u-v \in \mathbb{U} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |u| \leqslant 1 \\ |v| \leqslant 1. \end{cases}$
4. Soit $(a,b) \in E$.
   (a) Montrer que $|b+1| \leqslant 1$.
   (b) Montrer que $|b-1| \leqslant 1$.
   (c) En déduire b.
   (d) Déterminer également a.
5. Conclure : déterminer proprement E.