Commentaires sur le Devoir Surveillé 2 Fonctions réelles - Trigonométrie Nombres complexes

Problème I - Fonctions réelles

On considère la fonction :

$$f: \quad x \mapsto \frac{e^x}{1-e^x}.$$

1. Facile mais bien traitée.

2. Certains ont oublié de parler des limites en 0^+ et 0^-. Il était demandé de bien justifier chaque valeur. Globalement bien traitée.

3. Bien. N'oubliez pas de dire que f est bien dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions dérivables et précisez : dont le dénominateur ne s'annule pas.

4. Certains ont mangé la valeur 0. Quelques réponses incohérentes ou incomplètes. Vérifiez que votre fonction n'est pas strictement croissante de -1 à -1 ce qui est gênant ou pire qu'elle croît en partant de $+\infty$ ce qui n'est pas facile non plus...

5. Bien dans l'ensemble. Attention le résultat doit être en fonction de $f(x)$ uniquement. Cependant vous n'avez pas compris l'intérêt de cette question dans la suite... Elle servait pour la question 7.

6. Les réponses sont de qualité très variable. Intolérable que tout le monde ne soit pas capable de réciter le théorème avec la démarche suivante :

   (a) Je cite toutes les hypothèses (et uniquement les hypothèses en question : parler de dérivabilité ici ou du fait que f' ne s'annule pas est hors sujet et faisait perdre des points).

   (b) Je cite le théorème.

   (c) Je cite la conclusion (et je l'encadre).

7. Il y avait un point juste pour la récitation exacte du théorème. Comme pour la question précédente, vous oubliez souvent de citer le nom du théorème. Très peu de bonnes réponses pour l'expression de $g'(x)$ même si vous saviez très largement que $g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$. Il fallait s'aider de la question 5. A reprendre car à savoir faire.

8. Quelques confusions chez certains entre a, b et x. Il fallait trouver a et b deux nombres fixés et indépendants de x pour que l'égalité soit vraie pour tout $x > 0$. D'autres ont les valeurs mais ne sont pas très clairs dans leur raisonnement. On chercher UN couple solution. On a donc plutôt des implications réciproques. Il faut écrire « il suffit de prendre » et non « il faut prendre ». Nous cherchions des valeurs **suffisantes** et non **nécessaires**. C'est un peu subtil mais à ne pas négliger.

9. Badaboum pour toute la classe. Quand on intègre, il est nécessaire de faire apparaître une constante ! Certains l'ont fait (pas beaucoup cependant) mais personne n'est allé chercher la valeur de cette constante. Nous n'avons pas encore retravaillé cette notion ensemble mais dès la rentrée nous en reparlons, c'est très important. Il serait judicieux de le comprendre dès maintenant.

10. Plutôt bien pour beaucoup. Question généreusement dotée. Encore quelques rédactions bancales cependant.

Problème II - Trigonométrie

Les parties sont dépendantes entre elles. La partie 4 ne dépend pas de la partie 3.

Partie 1 : la différence et le produit

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$D(x) = \cos(x) - \sin(x) \qquad \text{et} \qquad P(x) = \cos(x)\sin(x).$$

1. (a) Pas bon. Je crois que vous avez surtout été gênés par le mot de vocabulaire « forme polaire ». C'est dommage car en tant que première question, c'est une question facile sur une notion basique. A bien retravailler.
   (b) Des problèmes de gestions du k. Globalement pas aussi bien réussie que cela devrait. Nous sommes sur une question très classique pourtant largement travaillée en TD. Certains intuitent et donc parachutent le résultat.
   (c) Ok. Question généreusement dotée mais ne fonctionnait que si l'on avait la bonne réponse à la question précédente.
2. (a) C'est cadeau. Globalement sue mais... pas toujours !
   (b) Mêmes remarques qu'en question 1.b. Mais plus dure ici, avec le fait que vous ne pouviez pas vous en sortir à l'intuition. Vous avez été trop nombreux à encadrer $2x$ par $\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \leqslant 2x \leqslant \frac{\pi}{6} + 2k\pi$. C'est absurde car cela implique que $\frac{5\pi}{6} \leqslant \frac{\pi}{6}$. Je vous avais pourtant lourdement signalé ce type d'erreur en classe. Cela révèle un manque de pratique de votre part.
   (c) Vous avez été nombreux à croire qu'il fallait prendre les solutions de la question précédente, or ces deux questions étaient complètement indépendantes ! Soyez attentif à ce que vous lisez.
3. Facile, bien réussie.

Partie 2 : le produit de la différence et du produit

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$g(x) = P(x)D(x) = \cos(x)\sin(x)\left(\cos(x) - \sin(x)\right).$$

4. Il fallait avoir bon aux questions précédentes. Un tableau de signe suffisait. Vous y avez pensé mais vous ne justifiez pas comment vous l'obtenez : si vous vous servez de réponses précédentes, il faut systématiquement les citer !
5. Pas mal de bonnes réponses, pas de pièges c'est comme vu en TD. A reprendre pour ceux qui n'ont pas su.
6. Facile mais vous l'avez parfois surestimée en ne voyant pas qu'il suffisait de se servir de la question 3.

Partie 3 : une fonction trigonométrique

On considère la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos^3(x) + \sin^3(x). \end{array}$$

7. Peu traitée. Quelques bonnes réponses. Pas si dure quand on sait comment démarrer.
8. Encore moins traitée. Plusieurs parviennent à calculer la dérivée mais personne ne reconnaît alors dans f' la fonction g, ce qui rendait la résolution assez simple avec ce qui précède.
9. Quelques réponses, pas de difficulté. N'allez pas trop vite dans la rédaction.
10. Non traitée.

Partie 4 : une méthode tordue pour les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

On pose $a = \frac{\pi}{12}$.

11. Quelques arnaques ici : certains ont parachuté le fait que D était décroissante, cela n'apportait aucun point.
12. Non traitée.
13. Ok, facile.
14. La rédaction n'est pas souvent claire vous passez souvent trop vite à la conclusion, ce qui laisse à penser à du foçage/arnaque vu que le résultat était de toute façon donné.
15. Quelques bonnes réponses.
16. Non traitée.

Problème III - Complexes

On considère l'application complexe suivante :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} \setminus \{2i\} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \frac{2z-i}{z-2i} \end{array}$$

1. Deux points à prendre... uniquement si l'on répondait à la question sans faire d'erreur de calcul ce qui n'est malheureusement pas toujours le cas.
2. (a) Même remarque.
   (b) Facile ! Souvent réussie.
   (c) Comme vu en TD, à quelques erreurs près c'est correct même si certains sont partis avec des expressions fausses au départ.
3. Pas toujours su et pourtant c'est du grand classique. Quelques belles réponses. N'oubliez pas de préciser à la fin que $2i$ n'est pas dans $\mathbb{U}$.

Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{2i\}$, on pose $g(z) = \mathrm{Im}\left(f(z)\right)$.

4. Pas très souvent réussie mais plusieurs y sont parvenus.
5. Plusieurs sont repartis du début, cela prenait plus de calcul alors qu'avec la question précédente, c'était bien plus rapide. Une seule personne il me semble est parvenu à me donner le bon ensemble en pensant bien à enlever $2i$. Aucun mystère : la préparation des interros aide...
6. Ok globalement mais la rédaction est souvent à revoir notamment la notation finale pour l'ensemble A.
7. Soit $\theta \in A$ et $z = 2\,\mathrm{e}^{i\theta}$.
   (a) Peu de bonnes réponses. C'est de la factorisation par l'angle moitié et par conséquent, à savoir.
   (b) Bien souvent vous ne répondez pas à la question car vous donnez une expression de g en fonction de z et de θ alors que nous voulions que du θ.
8. Quelques malins se servent de la question 4., ce n'est pas exactement ce qui est demandé mais j'ai donné une partie des points.
9. Pas de difficulté à condition d'être propre sur la gestion des variables.
10. Regardez bien la rédaction du corrigé.
11. Deux ou trois bonnes réponses.

Problème IV - Complexes

On cherche à déterminer l'ensemble suivant :

$$E = \left\{ (a,b) \in \mathbb{C}^2 \;\middle|\; \forall z \in \mathbb{U},\ z^2 + az + b \in \mathbb{U} \right\}.$$

1. Puisque qu'il n'y a pas grand chose à faire dans cette question, il est important de la rédiger proprement en particulier de bien justifier l'implication $z \in \mathbb{U} \Rightarrow z^2 \in \mathbb{U}$.
2. (a) C'est du cours !!!
   (b) Même remarque.
   (c) Ok. Attention, on parle de l'ensemble $\{0\}$ et non de 0.
3. Non traitée sauf deux ou trois qui ont trouvé de belles solutions.
4. La fin n'a pas été traitée à une exception près.
   (a)
   (b)
   (c)
   (d)
5.