Epreuve de mathématiques 3
2021-2022

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé
Durée : 4h

Encadrer les résultats et numéroter les copies

Exercice 1 - Calcul dans $\mathbb{R}$

Les trois questions sont indépendantes.

1. Déterminer $\mathscr{S}_1$ l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation (I_1) : $|4-x| \leqslant \sqrt{2x+1}$.
2. Déterminer $\mathscr{S}_2$ l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation (I_2) : $|x|+|x-1|+|x-2| \leqslant 6$.
3. Déterminer $\mathscr{S}_3$ l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation (E_3) : $\ln\left(\frac{x+3}{2}\right) = \frac{\ln(x)+\ln(3)}{2}$.

Exercice 2 - Calcul algébrique

On définie la fonction cotangente par cotan : $x \mapsto \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$.

1. Préciser $\mathcal{D}$ le domaine de définition de cotan.
2. Soit $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$. Montrer que $\operatorname{cotan}(x) - 2\operatorname{cotan}(2x) = \tan(x)$.
3. Soient $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ et $n \in \mathbb{N}$. On pose

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\tan\left(\frac{x}{2^k}\right)}{2^k}.$$

   (a) Justifier que S_n existe.
   (b) Calculer S_n.
   (c) Rappeler la valeur de $\lim\limits_{u \to 0} \dfrac{\sin(u)}{u}$. En déduire la limite de S_n quand $n \to +\infty$.

Exercice 3 - Complexes

On considère les équations

$$(E) \qquad z^3 - (1+2i)\,z^2 + 3\,(1+i)\,z - 10\,(1+i) = 0$$

et

$$(F) \qquad z^2 - (1+4i)\,z - 5\,(1-i) = 0.$$

1. Déterminer l'ensemble $\mathscr{S}_I$ des complexes imaginaires purs solutions de (E).
2. Résoudre (F) dans $\mathbb{C}$. On note z_1 et z_2 les deux solutions obtenues.
3. Préciser $z_1 + z_2$ et $z_1 z_2$. Est-ce cohérent ?
4. Résoudre (E) dans $\mathbb{C}$.
5. Soient A, B et C les points dont les affixes sont les solutions de (E). Dessiner ABC et montrer que ABC est un triangle isocèle rectangle.

Problème 4 - Calcul algébrique

On note $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \;\middle|\; \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \mathbb{R} \right\}$ l'ensemble des suites réelles. On considère alors l'application suivante :

$$\varphi\ :\ \begin{array}{rcl} E & \to & E \\ a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & \varphi(a) = b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}, \end{array}$$

où on définit la suite $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad b_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $k \in \mathbb{Z}$, on pose par convention $\binom{n}{k} = 0$ si $k < 0$ ou si $k > n$.
Soit $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$.

Partie 1 : Quelques sommes

1. On suppose que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = 1$.
   Préciser alors $\varphi(a) = b$ i.e. pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $b_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On suppose que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = x^k$. Préciser alors $b = \varphi(a)$.
3. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\sum_{0\leqslant k,l\leqslant n} \binom{n}{k} x^l$.
4. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\sum_{0\leqslant l\leqslant k\leqslant n} \binom{n}{k} x^l$.

Partie 2 : Image d'une suite de binômes

5. Soit $(i, k, n) \in \mathbb{N}^3$ tel que $i \leqslant k \leqslant n$. Montrer que $\binom{n}{k}\binom{k}{i} = \binom{n}{i}\binom{n-i}{n-k}$.
6. Soit $i \in \mathbb{N}$. On suppose que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = \binom{k}{i}$.
   (a) Suivant la valeur de i préciser a_3.
   (b) Soit $b = \varphi(a)$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = 2^{n-i}\binom{n}{i}$.
   (c) Si $i = 0$, quel résultat retrouve-t-on ?

Partie 3 : Image des premiers entiers

On suppose pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = k$ et on pose toujours $b = \varphi(a)$. On propose trois méthodes pour calculer b.

7. *Méthode 1.* A l'aide de la question 6. calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, b_n.
8. *Méthode 2.* Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f\ :\ \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \end{array}$.
   (a) Calculer deux expressions de f'.
   (b) Retrouver alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, la valeur de b_n.

9. *Méthode 3.*
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Sans s'aider des questions 7. ou 8., montrer que
   $$b_{n+1} = b_n + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k-1} k.$$
   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} = 2b_n + 2^n$.
   (c) A l'aide d'une récurrence retrouver alors le résultat de la question 7. ou 8.b
10. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\displaystyle\sum_{0\leqslant i<k\leqslant n} \binom{n}{k}$.

Partie 4 : Construction de l'antécédent

On suppose dans cette partie que $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ est une suite quelconque et on pose $b = \varphi(a)$. On définit également pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}^2$, $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$, appelé le symbole de Kronecker.

11. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $i \in [\![0; n]\!]$, à l'aide de la question 5. exprimer $\displaystyle\sum_{k=i}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k}\binom{k}{i}$ en fonction de $\delta_{n,i}$.
12. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$
    $$a_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} b_k.$$
13. Démontrer que φ est bijective.

Problème 5 - Complexes

Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$, on pose
$$f(z) = \frac{iz + 1 + 2i}{z - i}.$$

Partie 1 : Autour de f

1. Calculer $f(-i)$ et donner sa forme polaire.
2. Résoudre dans $\mathbb{C} \setminus \{i\}$ l'équation $f(z) = i$.
3. Simplifier pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$, $f \circ f(z)$.
4. En déduire que f définit une bijection de $\mathbb{C} \setminus \{i\}$ dans un ensemble à déterminer et préciser sa réciproque.
5. Déterminer les points fixes de z i.e. résoudre dans $\mathbb{C} \setminus \{i\}$ l'équation $f(z) = z$.
6. Déterminer $f^{\leftarrow}(\mathbb{U})$.

Partie 2 : Autour de g

Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$, on pose $g(z) = f(z) + 1$.

7. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$, $g(z) = (1+i)\frac{z+1}{z-i}$.
8. Déterminer l'ensemble des complexes $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$ tels que les points $A(-1)$, $M(z)$ et $M'(f(z))$ soient alignés.
9. Calculer $(1+i)^7$.
10. En déduire l'ensemble des racines 7-ième de $8 - 8i$. *On les exprimera sous forme polaire.*
11. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\mathrm{e}^{7z} = 8 - 8i$.
12. Soit $k \in [\![1;6]\!]$. Montrer que $\frac{1-i}{2}\left(\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{7}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{7}\right)} - 1\right) \neq i$.
13. Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation $g(z)^7 = 8 - 8i$ est donné par

$$\mathscr{S} = \left\{ \frac{1-i}{2}\left(\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{7}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{7}\right)} - 1\right) \,\middle|\, k \in [\![1;6]\!] \right\}$$