Commentaires sur le Devoir Surveillé 3 Calcul dans $\mathbb{R}$, calcul algébrique & complexes

Exercice I - Calcul dans $\mathbb{R}$

Les trois questions sont indépendantes.

1. Plutôt bien dans l'ensemble. Vous pensez bien à prendre $x \geqslant -\frac{1}{2}$ mais vous ne justifiez pas toujours proprement l'élévation au carré. La disjonction de cas sur $|4-x|$ n'était pas nécessaire car $|4-x|^2 = x^2 - 8x + 16$ dans tous les cas. Attention, (I_1) est une inégalité et non pas une égalité, on ne cherche pas juste les racines mais on cherchait le signe du trinôme obtenu.
2. Plutôt bien traitée dans l'ensemble. Quelques erreurs grossières de signe ou de mauvaise compréhension de la méthode mais globalement bien. L'ensemble solution est un intervalle ici $[-1;3]$ et non pas l'ensemble contenant l'intervalle comme j'ai pu le lire : $\{[-1;3]\}$.
3. Moins souvent traitée et pourtant encore plus facile lorsque l'on sait manipuler le logarithme, cette question très basique était généreusement dotée. Attention à bien rédiger l'existence de (E_3) avant de la manipuler.

Exercice II - Calcul algébrique

On définie la fonction cotangente par cotan : $x \mapsto \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$.

1. Facile et peu réussie ou alors mal rédigée. La réponse finale ne doit pas contenir de modulo vu que cette notion n'est plus au programme.
2. Plutôt bien dans l'ensemble, il fallait développer et non pas factoriser.
3. Soient $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ et $n \in \mathbb{N}$. On pose
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\tan\left(\frac{x}{2^k}\right)}{2^k}.$$
   (a) Très peu de bonnes réponses. Il ne suffit pas de dire que $\frac{x}{2^k} \neq \frac{\pi}{2}$ (et encore moins juste x). Je rappelle que la fonction tangente n'est pas définie non plus en $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$... Affirmer que $\frac{x}{2^k}$ est toujours dans l'ensemble de définition de la fonction tangente ne suffit pas non plus : il faut le démontrer.
   (b) Il fallait reconnaître une somme télescopique cachée. Deux ou trois l'ont vue, d'autres l'ont redémontrée en découpant la somme en deux avec un glissement d'indice mais la grande grande majorité a passé la question.
   (c) Un point cadeau sur la limite ! Il faut connaître son cours. La question suivante nécessitait d'avoir résolu la question précédente. Aucune bonne réponse.

Exercice III - Complexes

On considère les équations

(E) $$z^3 - (1+2i)\,z^2 + 3\,(1+i)\,z - 10\,(1+i) = 0$$

et

(F) $$z^2 - (1+4i)\,z - 5\,(1-i) = 0.$$

1. Très décevant dans l'ensemble. Très peu connaissent la méthode et d'autres font des confusions sur l'argument $\left(y^2-3y-10\right)+i\left(-y^3+2y^2+3y-10\right)=0$ implique $y^2-3y-10$ et $-y^3+2y^2+3y-10=0$. En effet cet argument ne fonctionne QUE parce que les deux parties sont RELLES. Décevant parce que nous avions fait cet exercice en classe et aussi en exercice de révision pendant la Toussaint (exo2).

2. Classique. Un type de question que vous aimez et plutôt réussie dans l'ensemble même si des erreurs de calculs persistent et ce malgré la question suivante qui devait vous forcer à vous relire.

3. Ne répondez pas juste que c'est cohérent, justifiez pourquoi. Attention si vous avez fait une erreur dans le Δ à la question précédente, cela ne se verra pas dans z_1+z_2 mais cela se verra dans le produit.

4. Barème gentil ici mais sachez qu'il faudra mieux justifier à l'avenir la factorisation de (E) en (F).

5. Assez bien lorsqu'elle est traitée mais peu de dessins, alors qu'il n'y a aucun piège. Le caractère isocèle vous a un peu plus gênés.

Problème IV - Calcul algébrique

On note $E=\mathbb{R}^{\mathbb{N}}=\left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \,\middle|\, \forall n\in\mathbb{N},\ u_n\in\mathbb{R}\right\}$ l'ensemble des suites réelles. On considère alors l'application suivante :

$$\varphi\ :\ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ a=(a_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & \varphi(a)=b=(b_n)_{n\in\mathbb{N}}\,, \end{array}$$

où on définit la suite $b=(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad b_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k.$$

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, et tout $k\in\mathbb{Z}$, on pose par convention $\binom{n}{k}=0$ si $k<0$ ou si $k>n$.
Soit $a=(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\in E$.

Partie 1 : Quelques sommes

1. C'est cadeau, c'est du cours. Puisque cela est facile, attention à justifier que vous reconnaissez un binôme de Newton.

2. Double cadeau, question redondante. Barème gentil pour valoriser ceux qui savent leur cours.

3. Des réponses variées. Du bon et du moins bon. Plusieurs ne savent pas encore manipuler les sommes doubles (encore plus valable pour la question suivante) et quelques-uns osent faire une somme géométrique sans prendre $x\neq 1$.

4. Des grosses confusions sur les sommes doubles avec des compteurs externes qui dépendent du compteur interne. A reprendre pour beaucoup d'entre vous.

Partie 2 : Image d'une suite de binômes

5. Bien dans l'ensemble. Gagnez encore en rigueur en considérant que $\binom{n-i}{n-k}=\frac{(n-i)!}{(n-k)!(k-i)!}$ que si $n-i\geqslant 0$, $n-k\geqslant 0$ et $n-i\geqslant n-k$.

6. Soit $i\in\mathbb{N}$. On suppose que pour tout $k\in\mathbb{N}$, $a_k=\binom{k}{i}$.
   (a) La moitié d'entre vous n'a pas compris la consigne et la plupart oublie le cas $i>k$ qui était tout à fait possible.
   (b) Des débuts de réponse corrects mais beaucoup trop d'arnaques pour tenter de terminer. Attention le binôme de Newton est une formule précise et si vous changez l'indice de début de somme, de fin ou du coefficient binomial, cela ne marche plus.
   (c) Là aussi précisez bien quel résultat l'on obtient ne vous contentez pas d'écrire « ça fait ça » Citez la question dont on retrouve le résultat.

Partie 3 : Image des premiers entiers

On suppose pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = k$ et on pose toujours $b = \varphi(a)$. On propose trois méthodes pour calculer b.

7. *Méthode 1.* Assez peu mais quelques bonnes réponses malgré tout.
8. *Méthode 2.* Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \end{array}$.
   (a) Très décevant. Encore un exercice type que nous avons fait en TD que vous n'avez pas su faire. L'immense majorité ne me donne qu'une seule expression de f' (certains l'une d'autres l'autre), l'énoncé en demandait deux
   (b) Non traitée, dommage !
9. *Méthode 3.*
   (a) Un peu technique et en fin de problème mais une ou deux belles réponses.
   (b) A l'exception d'une bonne réponse, non traitée.
   (c) Une petite récurrence, très peu traitée également.
10. Non réussie.

Partie 4 : Construction de l'antécédent

On suppose dans cette partie que $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ est une suite quelconque et on pose $b = \varphi(a)$. On définit également pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}^2$, $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$, appelé le symbole de Kronecker.

Partie très peu abordée et jamais réussie.

Problème V - Complexes

Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$, on pose

$$f(z) = \frac{iz + 1 + 2i}{z - i}.$$

Partie 1 : Autour de f

1. C'est cadeau et c'est sur deux points. Donner bien $f(-i)$ sous forme algébrique simple avant de donner la forme polaire.
2. Un petit calcul là aussi. Beaucoup de bonnes réponses mais certains ont été déstabilisés par le fait que l'ensemble solution était vide. Erreur que j'ai vu plusieurs fois :
   $$\frac{2i}{z-i} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2i(z+i)}{z^2+1} = 0.$$
   Ce qui est faut naturellement si $z = -i$. D'où l'importance d'être rigoureux.
3. Un calcul un peu moins petit mais où tout se simplifiait. Pas mal de bonnes réponses. Un petite faute au démarrage impliquait cependant des calculs souvent bien plus lourds.
4. Ok sous réserve d'avoir réussi la question précédente. Attention à ne pas parler de monotonie ou de théorème de la bijection dans $\mathbb{C}$! !
5. Assez bien aussi dans l'ensemble. Quelques erreurs toujours. Vous avez été nombreux (sinon tous) à passer par la forme algébrique pour calculer les racines carrées de $8i$ alors que la forme polaire donnait rapidement le résultat.
6. Peu traitée et très peu réussie.

Partie 2 : Autour de g

Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$, on pose $g(z) = f(z) + 1$.

7. Facile, bien réussie.

8. Le cours est bien su mais vous avez tous divisé par un complexe sans vérifier s'il était nul ou non. Très peu discutent à la fin si i est dans l'ensemble solution ou s'il faut l'exclure, alors que cette discussion apparaît systématiquement dans mon corrigé de l'interrogation.

9. Ok beaucoup laissent la forme polaire. La forme algébrique à la fin permettait de mieux apprécier la question suivante.

10. Beaucoup trop de confusions, de rédactions partielles. Il faut être solide sur cette question basique d'application directe du cours.

11. Peu de réponses, quelques courageux s'y essayent mais très peu de bonnes réponses. Attention à la pseudo-unicité de la forme polaire qui nécessite l'apparition d'un $\exists l \in \mathbb{Z}$...

12. Deux ou trois bonnes réponses, non traitée en général.

13. Non traitée.