Corrigé du Devoir Surveillé 3
Calcul dans $\mathbb{R}$, calcul algébrique & complexes

Exercice I - Calcul dans $\mathbb{R}$

Les trois questions sont indépendantes.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $2x+1 \geqslant 0 \iff x \geqslant -\frac{1}{2}$. L'inéquation est donc définie uniquement pour $x \geqslant -\frac{1}{2}$. Soit $x \in \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[$. On a alors

$$\begin{aligned}(I_1)\ :\ |4-x| \leqslant \sqrt{2x+1} \quad &\iff \quad |4-x|^2 \leqslant 2x+1 &&\text{car } |4-x| \geqslant 0 \text{ et } 2x+1 \geqslant 0\\ &\iff \quad 16-8x+x^2 \leqslant 2x+1 &&\text{car } |u|^2 = u^2\\ &\iff \quad x^2-10x+15 \leqslant 0.\end{aligned}$$

Soit Δ le discriminant associé. On a

$$\Delta = 100 - 60 = 40.$$

Donc les racines associées sont $\frac{10+\sqrt{40}}{2} = 5+\sqrt{10}$ et $5-\sqrt{10}$. D'où,

$$(I_1) \quad \iff \quad 5-\sqrt{10} \leqslant x \leqslant 5+\sqrt{10}.$$

Or on observe que $3 < \sqrt{10} < 4$ donc $2 > 5-\sqrt{10} > 1 > -\frac{1}{2}$. Conclusion, l'ensemble des solutions de (I_1) est donné par

$$\boxed{\mathscr{S}_1 = \left[5-\sqrt{10}; 5+\sqrt{10}\right].}$$

On vérifie pour $x=2$ par exemple : $|4-x| = |4-2| = 2$ et $\sqrt{2x+1} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5} > 2$ OK.
Pour $x=8$, on a $|4-8| = 4$ et $\sqrt{2x+1} = \sqrt{17} > 4$ OK.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a le tableau suivant :

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$\lvert x\rvert$		-x	0	x		x		x	
$\lvert x-1\rvert$		1-x		1-x	0	x-1		x-1	
$\lvert x-2\rvert$		2-x		2-x		2-x	0	x-2	

Premier cas, si $x \in]-\infty; 0]$, alors

$$(I_2) \quad \Leftrightarrow \quad -x+1-x+2-x \leqslant 6 \quad \Leftrightarrow \quad 3-3x \leqslant 6 \quad \Leftrightarrow \quad -3x \leqslant 3 \quad \Leftrightarrow \quad x \geqslant -1.$$

Dans ce cas,

$$\mathscr{S}_{2,1} = [-1; 0].$$

Deuxième cas, si $x \in [0; 1]$ alors,

$$(I_2) \quad \Leftrightarrow \quad x+1-x+2-x \leqslant 6 \quad \Leftrightarrow \quad 3-x \leqslant 6 \quad \Leftrightarrow \quad -x \leqslant 3 \quad \Leftrightarrow \quad x \geqslant -3.$$

ce qui est toujours le cas pour $x \in [0; 1]$. Dans ce cas,

$$\mathscr{S}_{2,2} = [0; 1].$$

Troisième cas, si $x \in [1; 2]$ alors,

$$(I_2) \quad \Leftrightarrow \quad x+x-1+2-x \leqslant 6 \quad \Leftrightarrow \quad x+1 \leqslant 6 \quad \Leftrightarrow \quad x \leqslant 5.$$

ce qui est toujours le cas pour $x \in [1; 2]$. Dans ce cas,

$$\mathscr{S}_{2,3} = [1; 2].$$

Quatrième cas, si $x \in [2; +\infty[$ alors,

$$(I_2) \quad \Leftrightarrow \quad x+x-1+x-2 \leqslant 6 \quad \Leftrightarrow \quad 3x-3 \leqslant 6 \quad \Leftrightarrow \quad 3x \leqslant 9 \quad \Leftrightarrow \quad x \leqslant 3.$$

D'où dans ce cas,

$$\mathscr{S}_{2,4} = [2; 3].$$

Ainsi,

$$\mathscr{S}_2 = \mathscr{S}_{2,1} \cup \mathscr{S}_{2,2} \cup \mathscr{S}_{2,3} \cup \mathscr{S}_{2,4} = [-1; 0] \cup [0; 1] \cup [1; 2] \cup [2; 3] = [-1; 3].$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{S}_2 = [-1; 3].}$$

On vérifie par exemple si $x = -1$: $|x| + |x-1| + |x-2| = 1+2+3 = 6 \leqslant 6$ OK.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{cases} \ln\left(\frac{x+3}{2}\right) \text{ existe} \\ \frac{\ln(x)+\ln(3)}{2} \text{ existe} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{x+3}{2} > 0 \\ x > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x > -3 \\ x > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x > 0.$$

Fixons désormais $x \in \mathbb{R}_+^*$. Dès lors par les propriétés algébriques du logarithme,

$$\begin{aligned} (E_3) \quad &\Leftrightarrow \quad 2\ln\left(\frac{x+3}{2}\right) = \ln(3x) \\ &\Leftrightarrow \quad \ln\left(\left(\frac{x+3}{2}\right)^2\right) = \ln(3x) && \text{car } x+3>0 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{x^2+6x+9}{4} = 3x && \text{par injectivité de la fonction logarithme} \\ &\Leftrightarrow \quad x^2+6x+9 = 12x \\ &\Leftrightarrow \quad x^2-6x+9 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (x-3)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x = 3 > 0. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{S}_3 = \{3\}.}$$

Exercice II - Calcul algébrique

On définie la fonction cotangente par cotan : $x \mapsto \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a
$$x \in \mathcal{D} \qquad \Leftrightarrow \qquad \sin(x) \neq 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall k \in \mathbb{Z},\ x \neq 0 + k\pi.$$
Conclusion,
$$\boxed{\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{ k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \}.}$$

2. Soit $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$. Donc $x \in \mathcal{D}$ et $2x \in]0;\pi[\subseteq \mathcal{D}$. Puis,
$$\begin{aligned}
\mathrm{cotan}(x) - 2\mathrm{cotan}\,(2x) &= \frac{\cos(x)}{\sin(x)} - 2\frac{\cos(2x)}{\sin(2x)} \\
&= \frac{\cos(x)}{\sin(x)} - 2\frac{\cos^2(x) - \sin^2(x)}{2\cos(x)\sin(x)} \\
&= \frac{\cos(x)}{\sin(x)} - \frac{\cos^2(x)}{\cos(x)\sin(x)} + \frac{\sin^2(x)}{\cos(x)\sin(x)} \\
&= \frac{\cos(x)}{\sin(x)} - \frac{\cos(x)}{\sin(x)} + \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \\
&= \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \\
&= \tan(x).
\end{aligned}$$
Conclusion,
$$\boxed{\forall x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[, \qquad \mathrm{cotan}(x) - 2\mathrm{cotan}\,(2x) = \tan(x).}$$

3. Soient $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ et $n \in \mathbb{N}$. On pose
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\tan\left(\frac{x}{2^k}\right)}{2^k}.$$
   (a) Pour tout $k \in [\![0; n]\!]$, on a
$$0 < \frac{x}{2^k} < \frac{\pi}{2^{k+1}} < \frac{\pi}{2}.$$
   Donc pour tout $k \in [\![0; n]\!]$, $\tan\left(\frac{x}{2^k}\right)$ existe et par suite la somme existe. Conclusion,
$$\boxed{\text{La somme } S_n \text{ existe.}}$$
   (b) Soit $k \in [\![0; n]\!]$. Posons $x_k = \frac{x}{2^k}$. On a vu à la question précédente que $x_k \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$. Donc par la question 2. on a
$$\begin{aligned}
\tan\left(\frac{x}{2^k}\right) &= \tan(x_k) \\
&= \mathrm{cotan}\,(x_k) - 2\mathrm{cotan}\,(2x_k) \\
&= \mathrm{cotan}\left(\frac{x}{2^k}\right) - 2\mathrm{cotan}\left(2\frac{x}{2^k}\right) \\
&= \mathrm{cotan}\left(\frac{x}{2^k}\right) - 2\mathrm{cotan}\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right).
\end{aligned}$$
   Ainsi,
$$\frac{\tan\left(\frac{x}{2^k}\right)}{2^k} = \frac{\mathrm{cotan}\left(\frac{x}{2^k}\right)}{2^k} - \frac{\mathrm{cotan}\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)}{2^{k-1}}.$$

Posons pour tout $k \in [\![-1;n]\!]$, $u_k = \frac{\mathrm{cotan}\left(\frac{x}{2^k}\right)}{2^k}$. En sommant l'égalité précédente entre 0 et n, on obtient

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (u_k - u_{k-1}).$$

On reconnaît alors une somme télescopique. D'où,

$$\boxed{S_n = u_n - u_{-1} = \frac{\mathrm{cotan}\left(\frac{x}{2^n}\right)}{2^n} - 2\mathrm{cotan}\,(2x).}$$

(c) On sait que

$$\lim_{u\to 0} \frac{\sin(u)}{u} = 1.$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \frac{\cos\left(\frac{x}{2^n}\right)}{2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)} - 2\mathrm{cotan}\,(2x).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right) = \frac{\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\frac{x}{2^n}} x.$$

En posant $u_n = \frac{x}{2^n}$, on a $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc par composition,

$$\lim_{n\to+\infty} 2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right) = \lim_{u\to 0} \frac{\sin(u)}{u} x = x.$$

De plus,

$$\lim_{n\to+\infty} \cos\left(\frac{x}{2^n}\right) = \lim_{u\to 0} \cos(u) = 1.$$

Par quotient,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{x} - 2\mathrm{cotan}\,(2x).}$$

Exercice III - Complexes

On considère les équations

(E)
$$z^3-(1+2i)\,z^2+3\,(1+i)\,z-10\,(1+i)=0$$

et

(F)
$$z^2-(1+4i)\,z-5\,(1-i)=0.$$

1. Soient $y\in\mathbb{R}$ et $z=iy$. On a

$$\begin{aligned}
z\in\mathscr{S}_I \quad&\Leftrightarrow\quad z^3-(1+2i)\,z^2+3\,(1+i)\,z-10\,(1+i)=0\\
&\Leftrightarrow\quad -iy^3+(1+2i)\,y^2+3i\,(1+i)\,y-10-10i=0\\
&\Leftrightarrow\quad -iy^3+y^2+2iy^2+3iy-3y-10-10i=0\\
&\Leftrightarrow\quad \left(y^2-3y-10\right)+i\left(-y^3+2y^2+3y-10\right)=0.
\end{aligned}$$

Par unicité de la forme algébrique, comme $y^2-3y-10\in\mathbb{R}$ et $-y^3+2y^2+3y-10\in\mathbb{R}$, on obtient

$$z\in\mathscr{S}_I \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} y^2-3y-10=0 & (1)\\ -y^3+2y^2+3y-10=0 & (2)\end{cases}$$

Soit Δ le discriminant associé à (1), on a $\Delta=9+40=49$. Donc

$$(1)\quad\Leftrightarrow\quad y=\frac{3+7}{2}=5\ \text{ OU }\ y=\frac{3-7}{2}=-2.$$

Or si $y=5$, alors
$$-y^3+2y^2+3y-10=-125+50+15-10=-70\neq 0.$$

Donc 5 n'est pas solution de (2). Si $y=-2$, alors

$$-y^3+2y^2+3y-10=8+8-6-10=0$$

Donc -2 est solution de (2). Ainsi,

$$z\in\mathscr{S}_I \quad\Leftrightarrow\quad y=-2 \quad\Leftrightarrow\quad z=-2i.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{S}_I=\{-2i\}\,.}$$

2. Soit Δ le discriminant associé à (F) :

$$\Delta=(1+4i)^2+20\,(1-i)=1+8i-16+20-20i=5-12i.$$

Soient $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ et $\delta=x+iy$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
\delta^2=\Delta \quad&\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x^2-y^2+2ixy=5-12i\\ x^2+y^2=|\delta|^2=|\Delta|=\sqrt{25+144}=\sqrt{169}=13\end{cases}\\
&\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x^2-y^2=5 & (1)\\ x^2+y^2=13 & (2)\\ xy=-6\end{cases}\\
&\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x^2=9 & \frac{(1)+(2)}{2}\\ y^2=4 & \frac{(2)-(1)}{2}\\ xy=-6\end{cases}\\
&\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x=3\\ y=-2\end{cases} \quad\text{OU}\quad \begin{cases} x=-3\\ y=2\end{cases} \qquad \text{car } xy<0
\end{aligned}$$

Posons $\delta = 3 - 2i$. Alors,

$$(F) \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{1+4i+3-2i}{2} = \frac{4+2i}{2} = 2+i \quad \text{OU} \quad z = \frac{1+4i-3+2i}{2} = -1+3i.$$

Conclusion, l'ensemble des solutions de (F) est donné par

$$\boxed{\mathscr{S}_F = \{2+i; -1+3i\}.}$$

On note z_1 et z_2 les deux solutions obtenues.

3. Par la question précédente, on a

$$z_1+z_2 = 2+i-1+3i = 1+4i \quad \text{et} \quad z_1 z_2 = (2+i)(-1+3i) = -2+6i-i-3 = -5+5i = -5(1-i).$$

Cela est cohérent avec le fait que nous venons de résoudre $z^2 - sz + p$ avec $s = 1+4i$ et $p = -5(1-i)$. Conclusion,

$$\boxed{z_1 z_2 = 1+4i = p, \quad z_1 z_2 = -5(1-i), \text{ cela est cohérent avec la formule } z^2 - sz + p.}$$

4. On sait par la question 1. que $z = -2i$ est une solution de (E). Donc $z+2i$ factorise $z^3 - (1+2i)z^2 + 3(1+i)z - 10(1+i)$. De plus, on observe que

$$\begin{aligned}
(z+2i)\left(z^2 - (1+4i)z - 5(1-i)\right) &= z^3 - (1+4i)z^2 - 5(1-i)z + 2iz^2 - (2i-8)z - 5(2i+2) \\
&= z^3 - (1+4i-2i)z^2 - (5-5i+2i-8)z - 10(1+i) \\
&= z^3 - (1+2i)z^2 - (-3-3i)z - 10(1+i) \\
&= z^3 - (1+2i)z^2 + 3(1+i)z - 10(1+i).
\end{aligned}$$

Dès lors,

$$\begin{aligned}
(E) \quad &\Leftrightarrow \quad (z+2i)\left(z^2 - (1+4i)z - 5(1-i)\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad z+2i = 0 \quad \text{OU} \quad z^2 - (1+4i)z - 5(1-i) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad z = -2i \quad \text{OU} \quad z \text{ solution de } (F).
\end{aligned}$$

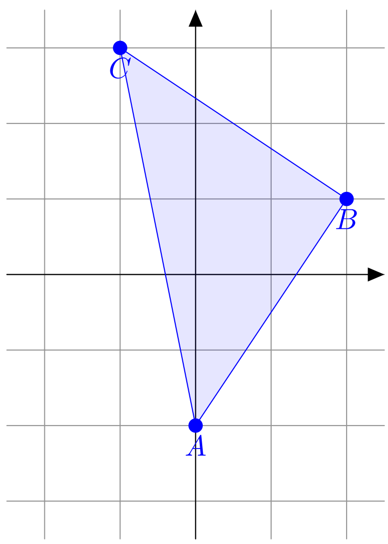
Par la question 2.

$$(E) \quad \Leftrightarrow \quad z = -2i \quad \text{OU} \quad z = 2+i \quad \text{OU} \quad z = -1+3i.$$

Conclusion, l'ensemble des solutions de (E) est donné par

$$\boxed{\mathscr{S}_E = \{-2i; 2+i; -1+3i\}.}$$

5. On définit les points $A(-2i)$, $B(2+i)$ et $C(-1+3i)$. On obtient alors la figure suivante :



Montrons que le triangle ABC est rectangle isocèle en B. On a

$$\begin{aligned}
\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} &= \frac{-2i - 2 - i}{-1 + 3i - 2 - i} \\
&= \frac{-2 - 3i}{-3 + 2i} \\
&= \frac{(-2 - 3i)(-3 - 2i)}{9 + 4} \\
&= \frac{(2 + 3i)(3 + 2i)}{13} \\
&= \frac{6 + 4i + 9i - 6}{13} \\
&= i.
\end{aligned}$$

Donc $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} \in i\mathbb{R}$ i.e. $\arg\left(\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$ et donc ABC est rectangle en B. De plus,

$$\left|\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}\right| = |i| = 1 \qquad \Rightarrow \qquad |z_A - z_B| = |z_C - z_B| \qquad \Rightarrow \qquad BA = BC.$$

Donc ABC est isocèle en B. Conclusion,

$$\boxed{\text{le triangle } ABC \text{ est isocèle rectangle en } B.}$$

Problème IV - Calcul algébrique

On note $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \mathbb{R} \right\}$ l'ensemble des suites réelles. On considère alors l'application suivante :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & \varphi(a) = b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}, \end{array}$$

où on définit la suite $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad b_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $k \in \mathbb{Z}$, on pose par convention $\binom{n}{k} = 0$ si $k < 0$ ou si $k > n$.
Soit $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$.

Partie 1 : Quelques sommes

1. On suppose que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = 1$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k}.$$

On reconnaît alors une somme de Newton. Par conséquent,

$$b_n = (1+1)^n = 2^n.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad b_n = 2^n.}$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On suppose que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = x^k$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k 1^{n-k}.$$

On reconnaît à nouveau une somme de Newton. On obtient que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad b_n = (x+1)^n.}$$

3. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned}\sum_{0 \leqslant k,l \leqslant n} \binom{n}{k} x^l &= \sum_{l=0}^{n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^l \\ &= \sum_{l=0}^{n} \left(x^l \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \right) \\ &= \sum_{l=0}^{n} \left(x^l (1+1)^n \right) && \text{car on reconnaît une somme de Newton} \\ &= 2^n \sum_{l=0}^{n} x^l. \end{aligned}$$

On reconnaît alors une somme géométrique de raison x. D'où

$$\boxed{\sum_{0 \leqslant k,l \leqslant n} \binom{n}{k} x^l = \begin{cases} 2^n \frac{1-x^{n+1}}{1-x} & \text{si } x \neq 1 \\ (n+1)\, 2^n & \text{si } x = 1. \end{cases}}$$

4. Soient $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $n \in \mathbb{N}$. La somme étant triangulaire, on commence par écrire que

$$\sum_{0 \leqslant l \leqslant k \leqslant n} \binom{n}{k} x^l = \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{k} \left(\binom{n}{k} x^l \right) = \sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k} \sum_{l=0}^{k} x^l \right).$$

La somme interne est une somme géométrique de raison $x \neq 1$,

$$\sum_{0 \leqslant l \leqslant k \leqslant n} \binom{n}{k} x^l = \sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k} \frac{1-x^{k+1}}{1-x} \right) = \frac{1}{1-x} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} - \frac{x}{1-x} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

Donc par les questions 1. et 2.

$$\sum_{0 \leqslant l \leqslant k \leqslant n} \binom{n}{k} x^l = \frac{2^n}{1-x} - \frac{x(x+1)^n}{1-x} = \frac{2^n - x(x+1)^n}{1-x}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\sum_{0 \leqslant l \leqslant k \leqslant n} \binom{n}{k} x^l = \frac{2^n - x(x+1)^n}{1-x}.}$$

Partie 2 : Image d'une suite de binômes

5. Soit $(i,k,n) \in \mathbb{N}^3$ tel que $i \leqslant k \leqslant n$. Par définition du coefficient binomial

$$\binom{n}{k}\binom{k}{i} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \frac{k!}{i!\,(k-i)!} = \frac{n!}{(n-k)!i!\,(k-i)!}.$$

D'autre part, on a $n-i \geqslant n-k$ et $i \leqslant n$ et donc

$$\begin{aligned}\binom{n}{i}\binom{n-i}{n-k} &= \frac{n!}{i!\,(n-i)!} \frac{(n-i)!}{(n-k)!\,(n-i-(n-k))!} \\ &= \frac{n!}{i!} \frac{}{(n-k)!\,(n-i-n+k)!} \\ &= \frac{n!}{i!\,(n-k)!\,(k-i)!}.\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall (i,k,n) \in \mathbb{N}^3, \qquad \binom{n}{k}\binom{k}{i} = \binom{n}{i}\binom{n-i}{n-k}.}$$

6. Soit $i \in \mathbb{N}$. On suppose que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = \binom{k}{i}$.

   (a) Premier cas, si $i = 0$ ou $i = 3$, alors $a_3 = \binom{3}{0} = \binom{3}{3} = 1$.
   Deuxième cas, si $i = 1$ ou $i = 2$, alors $a_3 = \binom{3}{1} = \binom{3}{2} = 3$.
   Troisième cas, si $i \geqslant 4$, alors par définition, $a_3 = 0$.
   Conclusion,
   $$\boxed{a_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i \in \{0;3\} \\ 3 & \text{si } i \in \{1;2\} \\ 0 & \text{si } i \geqslant 4. \end{cases}}$$

   (b) Soit $b = \varphi(a)$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a
   $$b_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{k}{i}.$$
   Si $k < i$ alors $\binom{k}{i} = 0$. Premier cas, $i > n$. Dans ce cas, $b_n = 0$. D'autre part, dans ce cas $\binom{n}{i} = 0$ donc on a bien
   $$b_n = 0 = 2^{n-i}\binom{n}{i}.$$
   On suppose maintenant que $i \leqslant n$. Dès lors,
   $$b_n = 0 + \sum_{k=i}^{n} \binom{n}{k}\binom{k}{i}.$$
   Dans ce cas, on a bien $i \leqslant k \leqslant n$. Donc par la question 5.
   $$b_n = \sum_{k=i}^{n} \underbrace{\binom{n}{i}}_{\text{indépendant de } k} \binom{n-i}{n-k} = \binom{n}{i}\sum_{k=i}^{n}\binom{n-i}{n-k}.$$
   On a pour tout $k \in [\![i;n]\!]$, $\binom{n-i}{n-k} = \binom{n-i}{n-i-(n-k)} = \binom{n-i}{k-i}$. Donc
   $$b_n = \binom{n}{i}\sum_{k=i}^{n}\binom{n-i}{k-i}.$$
   Posons $j = k - i$. Dès lors,
   $$b_n = \binom{n}{i}\sum_{j=0}^{n-i}\binom{n-i}{j}.$$
   Par la question 1. avec $\tilde{n} = n - i$, on a
   $$b_n = \binom{n}{i}2^{n-i}.$$
   Conclusion, dans tous les cas,
   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad b_n = 2^{n-i}\binom{n}{i}.}$$

   (c) Supposons $i = 0$ alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = \binom{k}{0} = 1$. On est donc dans le cas de la question 1. Or on obtient bien $2^{n-i}\binom{n}{i} = 2^n\binom{n}{0} = 2^n$. On retrouve bien
   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n.}$$

Partie 3 : Image des premiers entiers

On suppose pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = k$ et on pose toujours $b = \varphi(a)$.

7. Si on pose $i = 1$, on a pour tout $k \geqslant 1$, $\binom{k}{i} = \binom{k}{1} = k = a_k$. Si $k = 0$, on a aussi $\binom{k}{i} = \binom{0}{1} = 0 = a_0$. Donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = \binom{k}{1}$. Ainsi, par la question 6. pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$b_n = 2^{n-i}\binom{n}{i} = 2^{n-1}\binom{n}{1} = n2^{n-1}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad b_n = n2^{n-1}.}$$

8. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k \end{array}$.

(a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale. De plus, par dérivation d'une somme finie, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = 0 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\left(x^k\right)' = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}kx^{k-1}.$$

D'autre part, par la question 2. on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = (x+1)^n.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = n(x+1)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}kx^{k-1}.}$$

(b) Prenons $x = 1$. Par la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f'(1) = n(1+1)^{n-1} = n2^{n-1} = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k1^{k-1} = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k - 0 = b_n.$$

On observe que $b_0 = \sum_{k=0}^{0}\binom{0}{k}k = 0 = 0 \times 2^{0-1}$. Donc la formule reste vraie pour $n = 0$. Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad b_n = n2^{n-1}.}$$

9. *Méthode 3.*

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition, on a

$$\begin{aligned} b_n + \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n}{k-1}k &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k + \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n}{k-1}k \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k-1}k + \binom{n}{n+1-1}(n+1) \\ &= \sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right)k + \binom{n}{n}(n+1). \end{aligned}$$

Donc par la formule de Pascal,

$$\begin{aligned}
b_n + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k-1} k &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} k + n + 1 \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} k + \binom{n+1}{n+1} (n+1) \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} k \\
&= b_{n+1}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad b_{n+1} = b_n + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k-1} k.}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par la question précédente,

$$b_{n+1} = b_n + 0 + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} k.$$

Posons $\tilde{k} = k - 1$ i.e. $k = \tilde{k} + 1$. On a

$$\begin{aligned}
b_{n+1} &= b_n + \sum_{\tilde{k}=0}^{n} \binom{n}{\tilde{k}} \left(\tilde{k} + 1\right) \\
&= b_n + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} && \text{car l'indice de sommation est muet} \\
&= b_n + b_n + 2^n && \text{par la question 1.}
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad b_{n+1} = 2b_n + 2^n.}$$

(c) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathscr{P}(n) : \qquad \text{« } b_n = n2^{n-1} \text{ ».}$$

Initialisation. Si $n = 0$, alors

$$b_0 = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} k = 0 \qquad \text{et} \qquad n2^{n-1} = 0.$$

Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie. *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ i.e. $b_n = n2^{n-1}$. Montrons $\mathscr{P}(n+1)$. On a par la question précédente

$$\begin{aligned}
b_{n+1} = 2b_n + 2^n &= 2\left(n2^{n-1}\right) + 2^n && \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= n2^n + 2^n = (n+1)\, 2^n.
\end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion, on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad b_n = n2^{n-1}.}$$

10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\sum_{0 \leqslant i < k \leqslant n} \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} \sum_{i=0}^{k-1} 1 \right) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k - 0.$$

Donc par ce qui précède,

$$\boxed{\sum_{0 \leqslant i < k \leqslant n} \binom{n}{k} = n2^{n-1}.}$$

Partie 4 : Construction de l'antécédent

On suppose dans cette partie que $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ est une suite quelconque et on pose $b = \varphi(a)$. On définit également pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$, appelé le symbole de Kronecker.

11. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $i \in [\![0;n]\!]$. Alors, Puisque $i \leqslant k \leqslant n$, par la question 5. $\binom{n}{k}\binom{k}{i} = \binom{n}{i}\binom{n-i}{n-k}$ donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=i}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\binom{k}{i} &= \sum_{k=i}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{i}\binom{n-i}{n-k}\\ &= \binom{n}{i}\sum_{k=i}^{n}\binom{n-i}{n-k}(-1)^{n-k}\\ &= \binom{n}{i}\sum_{k=i}^{n}\binom{n-i}{n-i-(n-k)}(-1)^{n-k}\\ &= \binom{n}{i}\sum_{k=i}^{n}\binom{n-i}{k-i}(-1)^{n-k}.\end{aligned}$$

Posons $j = k - i$ i.e. $k = j + i$, on a

$$\sum_{k=i}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\binom{k}{i} = \binom{n}{i}\sum_{j=0}^{n-i}\binom{n-i}{j}(-1)^{n-i-j}.$$

On reconnaît alors une somme de Newton, donc

$$\sum_{k=i}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\binom{k}{i} = \binom{n}{i}(1-1)^{n-i}.$$

Si $i < n$ alors,

$$\sum_{k=i}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\binom{k}{i} = 0.$$

Si $i = n$, alors

$$\sum_{k=i}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\binom{k}{i} = \binom{n}{n}\sum_{j=0}^{0}\binom{0}{j}(-1)^{0-j} = 1.$$

Conclusion,

$$\boxed{\sum_{k=i}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\binom{k}{i} = \delta_{n,i}.}$$

12. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition de b_k, on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}b_k &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}a_i\\ &= \sum_{0\leqslant i\leqslant k\leqslant n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\binom{k}{i}a_i\\ &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=i}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\binom{k}{i}a_i\\ &= \sum_{i=0}^{n}a_i\sum_{k=i}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}.\end{aligned}$$

Donc par la question précédente,

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} b_k = \sum_{i=0}^{n} a_i \delta_{n,i} = 0 + \cdots + 0 + a_n + 0 + \cdots + 0 = a_n.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} b_k.}$$

13. Soit $(a, a') \in E^2$ tel que $b = \varphi(a) = \varphi(a')$. Donc par la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} a_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} b_k \\ a'_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} b_k \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad a_n = a'_n.$$

Donc la fonction φ est injective.

Soit $b \in E$. On définit alors $a \in E$ de la façon suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} b_k.$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^{-k} \binom{n}{k} b_k = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} \binom{n}{k} b_k$$

Posons pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\alpha_k = (-1)^k b_k$ et $\beta_k = (-1)^k a_k$. On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \beta_n = (-1)^n a_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} b_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha_k.$$

Donc par la question précédente,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \alpha_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \beta_k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} (-1)^k a_k = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k$$

ou encore

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad b_n = (-1)^n \alpha_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k.$$

Autrement dit $b = \varphi(a)$. Donc pour tout élément $b \in E$, on a construit un élément $a \in E$ tel que $b = \varphi(a)$. Donc φ est surjective.

Conclusion,

$$\boxed{\text{l'application } \varphi \text{ est bijective.}}$$

Problème V - Complexes

Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$, on pose

$$f(z) = \frac{iz + 1 + 2i}{z - i}.$$

Partie 1 : Autour de f

1. On a les égalités entre complexes suivantes :

$$f(-i) = \frac{i(-i) + 1 + 2i}{-i - i} = \frac{1 + 1 + 2i}{-2i} = \frac{1 + i}{-i} = \frac{i - 1}{1} = -1 + i.$$

Puis,

$$f(-i) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{4}}.$$

Conclusion,

$$\boxed{f(-i) = -1+i = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{4}}.}$$

2. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} f(z) = i \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{iz+1+2i}{z-i} = i \\ &\Leftrightarrow \quad iz+1+2i = iz+1 \qquad \text{car } z \neq i \\ &\Leftrightarrow \quad 2i = 0 \text{ impossible.} \end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble des solutions est donné par

$$\boxed{\mathscr{S} = \emptyset.}$$

3. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$. Alors par la question précédente, on sait que $f(z) \neq i$. Donc $f \circ f(z)$ existe de plus,

$$\begin{aligned} f \circ f(z) &= \frac{if(z)+1+2i}{f(z)-i} \\ &= \frac{i\frac{iz+1+2i}{z-i}+1+2i}{\frac{iz+1+2i}{z-i}-i} \\ &= \frac{\frac{-z+i-2}{z-i}+\frac{z+2iz-i+2}{z-i}}{\frac{iz+1+2i-iz-1}{z-i}} \\ &= \frac{-z+i-2+z+2iz-i+2}{iz+1+2i-iz-1} \qquad \text{car } z \neq i \\ &= \frac{2iz}{2i} \\ &= z. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}, \qquad f \circ f(z) = z.}$$

4. Posons $g = f$. La fonction g est définie sur $\mathbb{C} \setminus \{i\}$ et pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$, on a par la question précédente,

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}, \qquad f \circ g(z) = g \circ f(z) = f \circ f(z) = z = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}\setminus\{i\}}(z).$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ définit une bijection de } \mathbb{C} \setminus \{i\} \text{ dans } \mathbb{C} \setminus \{i\} \text{ et sa réciproque est donnée par } f^{-1} = f.}$$

5. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} f(z) = z \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{iz+1+2i}{z-i} = z \\ &\Leftrightarrow \quad iz+1+2i = z^2 - iz \qquad \text{car } z \neq i \\ &\Leftrightarrow \quad z^2 - 2iz - 1 - 2i = 0. \end{aligned}$$

Méthode 1. On observe que $z = -1$ est une solution : si $z = -1$,

$$z^2 - 2iz - 1 - 2i = 1 + 2i - 1 - 2i = 0.$$

Soit z_2 la seconde racine, puisque le coefficient en z^2 vaut 1, on a

$$-1 + z_2 = s = -(-2i) = 2i \qquad \Leftrightarrow \qquad z_2 = 1 + 2i.$$

On observe que $-1 \neq i$ et $1 + 2i \neq i$. Conclusion, l'ensemble des points fixes est donné par

$$\boxed{\mathscr{S} = \{-1; 1 + 2i\}.}$$

Méthode 2. Soit Δ le discriminant associé. On a

$$\Delta = -4 + 4(1 + 2i) = 8i = 8\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}.$$

Par conséquent pour $\delta \in \mathbb{C}$, on a

$$\delta^2 = \Delta \qquad \Leftrightarrow \qquad \delta = 2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2(1+i) \quad \text{OU} \quad \delta = -2(1+i).$$

Dès lors,

$$f(z) = z \qquad \Leftrightarrow \qquad z = \frac{2i - 2 - 2i}{2} = -1 \qquad \text{OU} \qquad z = \frac{2i + 2 + 2i}{2} = 1 + 2i.$$

Conclusion, l'ensemble des points fixes est donné par

$$\boxed{\mathscr{S} = \{-1; 1 + 2i\}.}$$

6. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
z \in f^{\leftarrow}(\mathbb{U}) \quad &\Leftrightarrow \quad f(z) \in \mathbb{U} \\
&\Leftrightarrow \quad |f(z)|^2 = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad f(z)\overline{f(z)} = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{iz + 1 + 2i}{z - i}\,\frac{-i\overline{z} + 1 - 2i}{\overline{z} + i} = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad |z|^2 + iz + 2z - i\overline{z} + 1 - 2i + 2\overline{z} + 2i + 4 = (z - i)(\overline{z} + i) \qquad \text{car } z \neq i \\
&\Leftrightarrow \quad |z|^2 + (2 + i)z + (2 - i)\overline{z} + 5 = |z|^2 + iz - i\overline{z} + 1 \\
&\Leftrightarrow \quad 2z + 2\overline{z} + 4 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad 4\mathrm{Re}(z) = -4 \\
&\Leftrightarrow \quad \mathrm{Re}(z) = -1.
\end{aligned}$$

On note que si $\mathrm{Re}(z) = -1 \neq 0$, alors $z \neq i$. Conclusion, l'ensemble solution est la droite d'équation $x = -1$:

$$\boxed{f^{\leftarrow}(\mathbb{U}) = \{-1 + iy \mid y \in \mathbb{R}\}.}$$

Partie 2 : Autour de g

Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$, on pose $g(z) = f(z) + 1$.

7. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$. On a

$$g(z) = f(z) + 1 = \frac{iz + 1 + 2i}{z - i} + 1 = \frac{iz + 1 + 2i + z - i}{z - i} = \frac{(1 + i)z + 1 + i}{z - i} = (1 + i)\frac{z + 1}{z - i}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}, \qquad g(z) = (1 + i)\frac{z + 1}{z - i}.}$$

8. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$. On considère les points $A(-1)$, $M(z)$ et $M'(f(z))$. Si $z = -1$, alors M et A sont confondus et donc A, M et M' sont alignés. Si $z \neq -1$. Alors,

$$\text{Les points } A, B \text{ et } C \text{ sont alignés} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{f(z)+1}{z+1} \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{g(z)}{z+1} \in \mathbb{R}.$$

Par la question précédente,

$$\begin{aligned} \text{Les points } A, B \text{ et } C \text{ sont alignés} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1+i}{z-i} \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1+i}{z-i} = \overline{\left(\frac{1+i}{z-i}\right)} \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1+i}{z-i} = \frac{1-i}{\overline{z}+i} \\ &\Leftrightarrow \quad \overline{z} + i\overline{z} + i - 1 = z - iz - i - 1 \\ &\Leftrightarrow \quad i(z+\overline{z}) + 2i = z - \overline{z} \\ &\Leftrightarrow \quad 2i\mathrm{Re}(z) + 2i = 2i\mathrm{Im}(z) \\ &\Leftrightarrow \quad \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Re}(z) + 1. \end{aligned}$$

On observe que le complexe -1 vérifie aussi cette égalité $(0 = -1+1)$ ainsi que le complexe i $(1 = 0+1)$. Conclusion, l'ensemble solution est la droite d'équation $y = x+1$ privé du point $(0,1)$:

$$\boxed{\mathscr{S} = \{x + i(x+1) = x(1+i) + i \mid x \in \mathbb{R}^*\} = \{y - 1 + iy = y(1+i) - 1 \mid y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}\}.}$$

9. On a les égalités suivantes

$$(1+i)^7 = (1+i)\left[(1+i)^2\right]^3 = (1+i)[1+2i-1]^3 = (1+i)(2i)^3 = (1+i)(-8i) = -8i+8.$$

Conclusion,

$$\boxed{(1+i)^7 = 8 - 8i.}$$

Et en louchant sur la question d'après c'est plutôt engageant.

10. Par la question précédente, on a $1+i$ qui est UNE racine 7-ième de $8-8i$. Donc pour $z \in \mathbb{C}$, on a

$$z^7 = 8 - 8i \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in [\![0;6]\!], \quad z = (1+i)\,\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{7}} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}\,\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{7}}.$$

Conclusion, l'ensemble des racines 7-ièmes de $8-8i$ est donné par

$$\boxed{\mathscr{S}_7 = \left\{ \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{7}\right)} \;\middle|\; k \in [\![0;6]\!] \right\}.}$$

11. Soit $z \in \mathbb{C}$. Posons $Z = \mathrm{e}^z$. On a

$$\mathrm{e}^{7z} = 8 - 8i \quad \Leftrightarrow \quad Z^7 = 8 - 8i.$$

Donc par la question précédente, on a

$$\mathrm{e}^{7z} = 8 - 8i \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in [\![0;6]\!], \quad Z = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{7}\right)}.$$

Posons $x = \mathrm{Re}(z)$ et $y = \mathrm{Im}(z)$. Dès lors, $Z = \mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^{iy}$ avec $\mathrm{e}^x > 0$. Donc par la pseudo-unicité de la forme polaire :

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{7z} = 8 - 8i \quad &\Leftrightarrow \quad \exists k \in [\![0;6]\!], \quad \mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^{iy} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{7}\right)} \\ &\Leftrightarrow \quad \exists k \in [\![0;6]\!],\ l \in \mathbb{Z}, \quad \begin{cases} \mathrm{e}^x = \sqrt{2} \\ y = \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{7} + 2l\pi \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \exists k \in [\![0;6]\!],\ l \in \mathbb{Z}, \quad \begin{cases} x = \ln\left(\sqrt{2}\right) = \frac{\ln(2)}{2} \\ y = \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{7} + 2l\pi \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \exists k \in [\![0;6]\!],\ l \in \mathbb{Z}, \quad z = \frac{\ln(2)}{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{7} + 2l\pi\right). \end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble des solutions est donné par

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ \frac{\ln(2)}{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{7} + 2l\pi\right) \;\middle|\; (k,l) \in [\![0;6]\!] \times \mathbb{Z} \right\}.}$$

12. Soit $k \in [\![1;6]\!]$. On note alors que $\frac{k\pi}{7} \in]0;\pi[$ et donc $\sin\left(\frac{k\pi}{7}\right) \neq 0$ et donc $\frac{1-i}{2}\left(\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{7}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{7}\right)} - 1\right)$ existe. Procédons par l'absurde. Notons $x_k = \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{7}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{7}\right)} - 1$. On note que $x_k \in \mathbb{R}$ et on a

$$\begin{aligned}
\frac{1-i}{2}\left(\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{7}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{7}\right)} - 1\right) = i \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{x_k}{2} - i\frac{x_k}{2} = i \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{x_k}{2} = 0 \\ -\frac{x_k}{2} = 1 \end{cases} \quad \text{par unicité de la forme algébrique car } \frac{x_k}{2} \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

On obtient que $0 = -1$ ce qui est impossible. Conclusion,

$$\boxed{\forall k \in [\![1;6]\!], \qquad \frac{1-i}{2}\left(\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{7}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{7}\right)} - 1\right) \neq i.}$$

13. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$. Grâce à la question 10., on a les équivalences suivantes :

$$g(z)^7 = 8 - 8i \qquad \Leftrightarrow \qquad \exists k \in [\![0;6]\!], \qquad g(z) = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{7}\right)} = (1+i)\,\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{7}}.$$

Or par la question 7. $g(z) = (1+i)\frac{z+1}{z-i}$. D'où

$$\begin{aligned}
g(z)^7 = 8 - 8i \quad &\Leftrightarrow \quad \exists k \in [\![0;6]\!], \qquad (1+i)\frac{z+1}{z-i} = (1+i)\,\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{7}} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{z+1}{z-i} = \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{7}} \\
&\Leftrightarrow \quad z + 1 = (z-i)\,\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{7}} \qquad \text{car } z \neq i \\
&\Leftrightarrow \quad z\left(1 - \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{7}}\right) = -1 - i\,\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{7}}.
\end{aligned}$$

Or pour $k \in [\![0;6]\!]$,

$$1 - \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{7}} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{7}} = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad k = 0.$$

Dans ce cas, si $k = 0$, on a

$$z\left(1 - \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{7}}\right) = 0 \neq -1 - i = -1 - i\,\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{7}}.$$

Donc $k = 0$ n'est pas solution. Ainsi,

$$g(z)^7 = 8 - 8i \qquad \Leftrightarrow \qquad \exists k \in [\![1;6]\!], \qquad z = -\frac{1 + i\,\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{7}}}{1 - \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{7}}}.$$

Soit $k \in [\![1;6]\!]$, on a, par factorisation par l'angle moitié,

$$\begin{aligned}
-\frac{1 + i\,\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{7}}}{1 - \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{7}}} &= -\frac{1 + \mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{7}\right)}}{1 - \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{7}}} \\
&= -\frac{\mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{7}\right)}}{\mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{7}}} \frac{\mathrm{e}^{-i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{7}\right)} + \mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{7}\right)}}{\mathrm{e}^{-i\frac{k\pi}{7}} - \mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{7}}} \\
&= -\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}} \frac{2\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{7}\right)}{-2i\sin\left(\frac{k\pi}{7}\right)} \\
&= -i\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{7}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{7}\right)}.
\end{aligned}$$

En développant par la formule $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$, on trouve que

$$
\begin{aligned}
-\frac{1+i\,\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{7}}}{1-\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{7}}} &= \frac{\sqrt{2}}{2}(-i+1)\,\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{k\pi}{7}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{k\pi}{7}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{7}\right)} \\
&= \frac{1-i}{2}\left(\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{7}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{7}\right)} - 1\right)
\end{aligned}
$$

Or on a vu à la question 12. que $\frac{1-i}{2}\left(\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{7}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{7}\right)} - 1\right) \neq i$ et est donc bien solution. Conclusion, l'ensemble des solutions est donné par

$$
\boxed{\mathscr{S} = \left\{ \frac{1-i}{2}\left(\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{7}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{7}\right)} - 1\right) \;\middle|\; k \in [\![1;6]\!] \right\}.}
$$