Epreuve de mathématiques 4
2021-2022

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé
Durée : 4h

Encadrer les résultats et numéroter les copies

Problème 1 - Fonctions usuelles

On considère les fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto \arctan\left(\frac{2\,\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{sh}^2(x)}\right) \qquad \text{et} \qquad u : x \mapsto \frac{2\,\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{sh}^2(x)}.$$

Partie 1 : Etude de u.

1. Déterminer $\mathscr{D}_u$ le domaine de définition de u.
2. Déterminer la limite de u en $+\infty$.
3. Préciser un équivalent simple de u au voisinage de $+\infty$ en fonction de e^{-x}.
4. Redémontrer la formule reliant ch^2 et sh^2.
5. Montrer que
$$\forall x \in \mathscr{D}_u, \qquad u'(x) = -2\frac{\mathrm{ch}^2(x)+1}{\mathrm{sh}^3(x)}.$$
6. Préciser le tableau de variation complet de u sur $\mathscr{D}_u \cap \mathbb{R}_+$.

Partie 2 : Simplification de f, méthode 1.

7. Déterminer $\mathscr{D}_f$ le domaine de définition de f.
8. Déterminer la parité de f.
9. A l'aide de la partie précédente, déterminer le tableau de variation complet de f sur $\mathscr{D}_f$.
10. Calculer la dérivée de f.
11. (a) En déduire une expression simplifiée de f sur $\mathscr{D}_f \cap \mathbb{R}_+$.
    (b) Déterminer une expression simplifiée de f sur $\mathscr{D}_f \cap \mathbb{R}_-$.

Partie 3 : Simplification de f, méthode 2.

Soit $y \in \left]1;+\infty\right[$

12. Montrer que $2\arctan\left(\frac{1}{y}\right) \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$.
13. Simplifier $\tan\left(2\arctan\left(\frac{1}{y}\right)\right)$.
14. Retrouver le résultat de la question 11.a

Problème 2 - Intégrales

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_n = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln^n(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Partie 1 : Etude de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n existe.
2. Calculer I_0.
3. Calculer I_1 par intégration par parties.
4. Calculer I_1 à l'aide du changement de variable $s = \frac{1}{t}$.
5. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad I_n = \int_0^1 x^n\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

6. A l'aide d'un encadrement de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ sur $[0;1]$, montrer que

$$n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

7. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.
8. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad I_{n+1} = (n+1)\,I_n - \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

9. En déduire I_2.

Partie 2 : Approximation de e.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

10. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = n!\left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}} S_n\right).$$

11. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.
12. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|S_n - \mathrm{e}| \leqslant \frac{3}{(n+1)!}$.

Problème 3 - Equations différentielles

On considère l'équation différentielle suivante d'inconnue φ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$(E_0) \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad x\,\varphi'(x) + \varphi(x) = 0.$$

1. Résoudre (E_0) sur $\mathbb{R}_+^*$. On écrire le résultat sous forme ensembliste et sous forme vectorielle.

Partie 1 : Equations différentielles d'ordre 1

Soient b une fonction continue sur $]0;2[$ et (E) l'équation différentielle d'inconnue φ une fonction dérivable sur $]0;2[$ définie par

$$(E) \qquad \forall x \in \,]0;2[\,, \qquad x\,\varphi'(x) + \varphi(x) = b(x)$$

On note $\mathscr{S}_E$ l'ensemble des solutions de (E).

2. On note B une primitive de b sur $]0;2[$. Déterminer $\mathscr{S}_E$ en fonction de B.
   On ne demande pas simplement le résultat mais la démonstration associée.
3. Soit $b_0 : \begin{array}{ccc}]0;2[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x^2-\frac{3}{2}x-1} \end{array}$. Justifier que b_0 admet des primitives sur $]0;2[$ et les déterminer.
4. En déduire les primitives de $b_1 : x \mapsto 6xb_0(x)$ sur $]0;2[$.
5. Préciser $\mathscr{S}_E$ lorsque $b = b_1$.
6. Déterminer $\mathscr{S}_E$ lorsque $b = b_2 : \begin{array}{ccc}]0;2[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x^2-\frac{3}{2}x+1} \end{array}$.
7. Déterminer $\mathscr{S}_E$ lorsque $b = b_1 + b_2$.

Partie 2 : Equation différentielle d'ordre 2 à coefficients constants

On considère l'équation différentielle suivante d'inconnue z une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$(F) \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \qquad z''(t) - 2z'(t) + z(t) = t^2 + 3.$$

8. Résoudre (F_0) l'équation homogène associée à (F).
9. En déduire l'ensemble des solutions de (F).

Partie 3 : Equation différentielle d'ordre 2 à coefficients non constants

On considère l'équation suivante d'inconnue y une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$(G) \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad x^2y''(x) - xy'(x) + y(x) = 0.$$

10. Soit y une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. On pose $\psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{y(x)}{x} \end{array}$ puis $\varphi = \psi'$.
    (a) Justifier que φ existe et est même dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et montrer que
    $$y \text{ est solution de } (G) \qquad \Leftrightarrow \qquad \varphi \text{ est solution de } (E_0).$$
    (b) En déduire l'ensemble des solutions de (G).
11. Soit y une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. On pose pour tout $t \in \mathbb{R}$, $z(t) = y\left(\mathrm{e}^t\right)$.
    (a) Justifier que z est deux fois dérivable et déterminer une équation différentielle vérifiée par z.
    (b) En déduire à nouveau l'ensemble des solutions de (G).

Partie 4 : Une équation fonctionnelle

(Si jamais ce sujet de 6h vous semble trop court...)

On considère l'équation fonctionnelle suivante d'inconnue f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$(H) \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f'(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right).$$

12. Montrer que si f est une solution de (H) alors f est une solution de (G).
13. Résoudre (H).