Commentaires sur le Devoir Surveillé 4 Fonctions usuelles, Intégrales & Equations différentielles

Problème I - Fonctions usuelles

Partie 1 : Etude de u.

1. Présentez votre variable x ! Attention à ne pas juste dire que $\mathrm{sh}(0) = 0$, il importe de spécifier que c'est l'unique valeur d'annulation de sh.
2. Bien dans l'ensemble, quelques réponses insuffisamment justifiées. Il fallait commencer par simplifier la fraction en factorisant par les termes prépondérants.
3. Très peu de bonnes réponses. Vérifiez que maintenant que nous avons travaillé davantage l'analyse asymptotique, cela se passe mieux.
4. Bien.
5. Justifiez que u est bien dérivable ! En précisant que c'est le quotient de fonctions dérivables sur $\mathscr{D}_u$ certes mais aussi en précisant « dont le dénominateur ne s'annule pas ».
6. Il manque là aussi des justifications pour la limite en 0^+. Notamment dire $\mathrm{sh}(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ ne suffit pas. Est-ce 0^+ ? 0^- ? Aucun des deux ? Cela change tout lorsque vous passez à l'inverse. On ne demandait le tableau que sur $\mathbb{R}_+^*$ soyez attentif à la consigne.

Partie 2 : Simplification de f, méthode 1.

7. Soulignez la différence par rapport à u : il est surtout attendu que vous souligniez que la fonction arctan est bien définie sur $\mathbb{R}$.
8. La moitié de la classe oublie de parler que $\mathscr{D}_f$ est bien centré en 0, l'autre y pense.
9. Justifiez bien vos résultats : 1 point pour la monotonie en précisant bien que arctan est croissante et garde la monotonie, 1 point pour la composition de limites (à écrire !) et 1 point pour l'utilisation de la parité de f pour son tableau sur $\mathbb{R}_-^*$.
10. A nouveau, pensez à la dérivabilité. Barème très généreux ici car finalement je n'ai pas enlevé de point si vous ne simplifiez pas votre résultat final, ce qui était de toute façon nécessaire pour faire la question suivante.
11. (a) Une ou deux bonnes réponses maximum ici, dommage !
    (b) Idem.

Partie 3 : Simplification de f, méthode 2.

12. Vos rédactions sont souvent confuses ici. Regardez bien la correction. J'ai vu beaucoup de calculs de limites aux bords pour argumenter la conclusion. Notez que connaître une fonction aux bords n'implique rien a priori sur la fonction sur l'intervalle tout entier (à moins d'invoquer proprement le théorème de la bijection). Par exemple,
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$
et pourtant il est bien sûr faux d'affirmer que $0 \leqslant \frac{1}{x} \leqslant 0$.

13. 1 point sur la justification que tous les objets existent : $\tan\left(2\arctan\left(\frac{1}{y}\right)\right)$ MAIS aussi $\tan\left(\arctan\left(\frac{1}{y}\right)\right)$ car dans la formule de $\tan(2a) = \ldots$ on a besoin de l'existence de $\tan(2a)$ mais aussi de $\tan(a)$.

14. Une seule bonne réponse.

Problème II - Intégrales

Partie 1 : Etude de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Il faut parler de continuité !!! Trop de mauvaises réponses. Plus subtil mais néanmoins tout aussi fondamental, vous avez été nombreux à confondre primitive et intégrale. Parler d'existence de primitive ou invoquer le théorème fondamental de l'analyse ici alors que nous parlions d'une intégrale fixée (à n fixé) rend confus votre justification.

2. Facile, deux points cadeau.

3. Des bonnes réponses mais beaucoup trop de mauvaises rédactions, révélatrices forcément d'un manque de préparation pour cette technique très classique. Dire u et v $\mathscr{C}^1$ avant de les écrire pousse à un raisonnement faux car vous mettez alors le caractère $\mathscr{C}^1$ en hypothèse et non en conséquence. De même parler de dérivabilité est insuffisant, le théorème réclame du $\mathscr{C}^1$. Il faut gagner en rigueur et cela passe par davantage de pratique en amont...

4. Du bon globalement mais encore des fragilités chez certains. Soyez propres sur le $\mathrm{d}t = \ldots.$

5. Le changement de variable a été globalement vu mais pas toujours.

6. Un massacre, il va falloir que l'on retravaille la croissance de l'intégrale. Pour

$$\forall t \in [a;b]\,,\ f(t) \leqslant g(t) \qquad \Rightarrow \qquad \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

   - Il faut citer « par croissance de l'intégrale ».
   - Il faut préciser au correcteur que vous avez pensé à vérifier que les bornes sont dans le bon sens ($a \leqslant b$).
   - Il ne faut pas marquer d'équivalence ! La réciproque est fausse en général.

   Des erreurs aussi sur l'inégalité de l'exponentielle et ensuite :

$$0 \leqslant \mathrm{e}^{-x} \leqslant 1 \qquad \Rightarrow \qquad 0 \leqslant x^n\,\mathrm{e}^{-x} \leqslant x^n,$$

   nécessite de dire que $x^n \geqslant 0$.

7. Ne confondez pas I_n qui est un nombre avec $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est une suite. Il suffisait d'invoquer le théorème d'encadrement, certains sont partis sur de la monotonie de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, c'était faisable (bien que inutile) mais attention à rester rigoureux. Beaucoup ont affirmé que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, c'est peut-être vrai mais cela ne découle pas immédiatement de l'inégalité $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$: $\frac{1}{n+1}$ n'est pas un majorant car il dépend justement de n !

8. Quelques bonnes réponses. Même remarque que précédemment sur l'intégration par parties : il faut justifier au moment opportun que u et v sont $\mathscr{C}^1$.

9. Facile. Citez proprement les questions que vous utilisez.

Partie 2 : Approximation de e.

10. Une ou deux bonnes réponses.

11. Pas toujours bien rédigée.

12. Quelques arnaques.

Problème III - Equations différentielles

1. Bien dans l'ensemble. Quelques copies ne rédigent pas, certains oublient le moins dans l'exponentielle ce qui pouvait être handicapant pour la suite. Ne laissez pas le résultat sous la forme $e^{-\ln(x)}$.

Partie 1 : Equations différentielles d'ordre 1

2. Beaucoup oublient de diviser le second membre par x ! ce qui rendait difficile le fait de pouvoir conclure. La rédaction est encore souvent très bancale. Il manque un nombre considérable de $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, des confusions entre la fonction f et le nombre $f(x)$, la présentation de vos fonctions n'est pas toujours claire. Ne dites pas soit φ_0 une solution homogène. Pensez déjà à bien préciser que φ_0 doit être non nulle et soyez même plus clairs : soit $\varphi_0 : x \mapsto \frac{1}{x}$, ce n'est pas une fonction mystérieuse mais bien précise (vous pouvez prendre $x \mapsto \frac{43}{x}$ si vous préférez). Enfin ne supposez pas φ solution de (E) au début mais raisonnez plutôt par équivalences. Plusieurs belles réponses cependant.

3. Là aussi la rédaction est souvent perfectible. Commencez par le discriminant et la recherche des racines, déduisez-en la continuité de b_0 puis l'existence de ses primitives et ensuite seulement calculez-les. Citez bien « Par le théorème de décomposition en éléments simples, il existe » plutôt que d'écrire a et b sans même les présenter. Au moment du passage en système de deux équations vérifiées par a et b, pas d'identification ni d'équivalences, rédigez bien par « on note qu'il suffit de prendre ». Enfin la conclusion est un ensemble de fonctions, souvent vous écrivez $B_0 : x \mapsto \cdots + C$, avec $C \in \mathbb{R}$, c'est bien moins propre.

4. Plusieurs bonnes réponses mais la majorité a abandonnée cette partie à cette question.

5. Un point facile si l'on avait réussi les précédentes questions.

6. Quelques bonnes réponses mais bien peu.

7. Attention à l'usage du principe de superposition. Ceux qui s'attaquent à cette question y pensent mais certains affirment $\mathscr{S} = \mathscr{S}_1 + \mathscr{S}_2$ ce qui est faux (il y a une constante dans $\mathscr{S}_1$ qui pourrait être prise indépendante de celle de $\mathscr{S}_2$, or $\mathscr{S}$ ne contient qu'une seule constante). Il faut bien dire qu'UNE solution de $\mathscr{S}_1$ plus UNE solution de $\mathscr{S}_2$ donnait UNE solution de $\mathscr{S}$. Je vous renvoie au corrigé pour une rédaction détaillée.

Partie 2 : Equation différentielle d'ordre 2 à coefficients constants

8. Facile et bien traitée. Rédigez un peu et dites en français ce qu'est (F_c)

9. Pas mal de bonnes réponses. L'introduction de z_p n'est pas toujours bien écrite. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Soit $z_p : x \mapsto ....$ Alors z_p est deux fois dérivable. Puis on dit z_p est solution de (F) si et seulement si ...

Partie 3 : Equation différentielle d'ordre 2 à coefficients non constants

10. (a) Votre justification de la dérivabilité de φ est souvent confuse. Des équivalences propres sont attendues. On part de (G) et on réinjecte les valeurs de $y''(x)$, $y'(x)$, $y(x)$, on simplifie et on retrouve (E_0).
    (b) Très peu de bonnes réponses. Pourtant pas si dure, mais attention à bien faire apparaître une nouvelle constante à chaque fois que vous intégrez.

11. (a) Des débuts de réponses et deux ou trois bonnes réponses.
    (b) Très peu abordée.

Partie 4 : Une équation fonctionnelle

Partie traitée par aucun d'entre vous.