Corrigé du Devoir Surveillé 4
Fonctions usuelles, calcul d'intégrales & équations différentielles

Problème I - Fonctions usuelles

On considère les fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto \arctan\left(\frac{2\operatorname{ch}(x)}{\operatorname{sh}^2(x)}\right) \qquad \text{et} \qquad u : x \mapsto \frac{2\operatorname{ch}(x)}{\operatorname{sh}^2(x)}.$$

Partie 1 : Etude de u.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$x \in \mathscr{D}_u \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{sh}^2(x) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq 0.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{D}_u = \mathbb{R}^*.}$$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$u(x) = \frac{2\frac{e^x+e^{-x}}{2}}{\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2} = \frac{e^x+e^{-x}}{\frac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4}} = 4\frac{e^x+e^{-x}}{e^{2x}-2+e^{-2x}}.$$

En factorisant par les termes prépondérants,

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad u(x) = 4\frac{e^x}{e^{2x}}\frac{1+e^{-2x}}{1-2e^{-2x}+e^{-4x}} = \frac{4}{e^x}\frac{1+e^{-2x}}{1-2e^{-2x}+e^{-4x}}.$$

Ainsi,

$$\lim_{x\to+\infty} u(x) = 4 \times 0 \times \frac{1+0}{1+0} = 0.$$

Conclusion,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} u(x) = 0.}$$

3. Par la question précédente, on a pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $u(x) = 4\frac{e^x+e^{-x}}{e^{2x}-2+e^{-2x}}$. Or $e^{-x} \underset{x\to+\infty}{\ll} e^x$ donc $e^x+e^{-x} \underset{x\to+\infty}{\sim} e^x$. De même, $e^{2x}-2+e^{-2x} \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{2x}$. Donc par quotient,

$$u(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} 4\frac{e^x}{e^{2x}} = 4e^{-x}.$$

Conclusion,

$$\boxed{u(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} 4e^{-x}.}$$

4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4} = \frac{2+2}{4} = 1.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1.}$$

5. La fonction u est dérivable sur $\mathscr{D}_u = \mathbb{R}^*$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur leurs domaines de définition. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad u'(x) = \left(\frac{2\operatorname{ch}(x)}{\operatorname{sh}^2(x)}\right)' = 2\frac{\operatorname{sh}(x)\operatorname{sh}^2(x) - \operatorname{ch}(x)\times 2\operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{sh}^4(x)} = 2\frac{\operatorname{sh}^2(x) - 2\operatorname{ch}^2(x)}{\operatorname{sh}^3(x)}.$$

Or par la question précédente, on sait que $\operatorname{sh}^2(x) = \operatorname{ch}^2(x) - 1$. Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad u'(x) = 2\frac{\operatorname{ch}^2(x) - 1 - 2\operatorname{ch}^2(x)}{\operatorname{sh}^3(x)}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad u'(x) = -2\frac{\operatorname{ch}^2(x)+1}{\operatorname{sh}^3(x)}.}$$

6. On note que $\mathscr{D}_u \cap \mathbb{R}_+ = \mathbb{R}^* \cap \mathbb{R}_+ = \mathbb{R}_+^*$. On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\operatorname{ch}^2(x) + 1 \geqslant 1 + 1 > 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\operatorname{sh}(x) > 0$ donc par la question précédente,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad u'(x) < 0.$$

Ainsi la fonction u est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, on sait déjà que $\lim_{x\to+\infty} u(x) = 0$. et enfin,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} u(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{2\operatorname{ch}(x)}{\operatorname{sh}^2(x)} = \frac{2}{0^+} = +\infty.$$

Conclusion,

x	0	$+\infty$
u	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$ 0

Partie 2 : Simplification de f, méthode 1.

7. Soit $x \in \mathbb{R}$. Puisque la fonction arctan est définie sur $\mathbb{R}$, on a directement,

$$x \in \mathscr{D}_f \qquad \Leftrightarrow \qquad x \in \mathscr{D}_u = \mathbb{R}^*.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{D}_f = \mathscr{D}_u = \mathbb{R}^*.}$$

8. L'ensemble $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}^*$ est centré en 0. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\begin{aligned} f(-x) &= \arctan\left(\frac{2\operatorname{ch}(-x)}{\operatorname{sh}^2(-x)}\right) \\ &= \arctan\left(\frac{2\operatorname{ch}(x)}{(-\operatorname{sh}(x))^2}\right) && \text{car la fonction ch est paire et sh est impaire} \\ &= \arctan\left(\frac{2\operatorname{ch}(x)}{\operatorname{sh}(x)}\right) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est paire.}}$$

9. On note que $f = \arctan \circ u$. De plus la fonction u est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, $u\left(\mathbb{R}_+^*\right) = \mathbb{R}_+^*$ et arctan est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc par composée, la fonction $f = \arctan \circ u$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, par composition, comme $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} u(x) = +\infty$,
$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = \lim_{u \to +\infty} \arctan(u) = \frac{\pi}{2}.$$
De même,
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) == \lim_{u \to 0} \arctan(u) = 0.$$
Donc sur $\mathbb{R}_+^*$,

x	0		$+\infty$
f	‖ $\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	0

Par la parité de f, on obtient,

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$ ‖ $\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	0

10. La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et la fonction arctan l'est sur $\mathbb{R}$. Donc par composée, la fonction f l'est sur $\mathbb{R}^*$. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On a
$$f'(x) = \frac{u'(x)}{1+u^2(x)}.$$
Par la question 5.,
$$\begin{aligned} f'(x) &= -2\frac{\operatorname{ch}^2(x)+1}{\operatorname{sh}^3(x)} \frac{1}{1+\left(\frac{2\operatorname{ch}(x)}{\operatorname{sh}^2(x)}\right)^2} \\ &= -2\frac{\operatorname{ch}^2(x)+1}{\operatorname{sh}^3(x)} \frac{1}{1+\frac{4\operatorname{ch}^2(x)}{\operatorname{sh}^4(x)}} \\ &= -2\frac{\operatorname{ch}^2(x)+1}{\operatorname{sh}^3(x)} \frac{\operatorname{sh}^4(x)}{\operatorname{sh}^4(x)+4\operatorname{ch}^2(x)} \\ &= -2\left(\operatorname{ch}^2(x)+1\right) \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{sh}^4(x)+4\operatorname{ch}^2(x)}. \end{aligned}$$
Puisque $\operatorname{sh}^2(x) = \operatorname{ch}^2(x) - 1$, on a $\operatorname{sh}^4(x) = \operatorname{ch}^4(x) - 2\operatorname{ch}^2(x) + 1$. D'où
$$\operatorname{sh}^4(x) + 4\operatorname{ch}^2(x) = \operatorname{ch}^4(x) + 2\operatorname{ch}^2(x) + 1 = \left(\operatorname{ch}^2(x)+1\right)^2.$$
Dès lors,
$$f'(x) = -2\left(\operatorname{ch}^2(x)+1\right) \frac{\operatorname{sh}(x)}{\left(\operatorname{ch}^2(x)+1\right)^2} = -2\frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}^2(x)+1}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad f'(x) = -2\frac{\operatorname{sh}(x)}{1+\operatorname{ch}^2(x)}.}$$

11. (a) On observe que la fonction $x \mapsto -2\frac{\operatorname{sh}(x)}{1+\operatorname{ch}^2(x)}$ est bien continue sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ et admet donc des primitives sur cet intervalle dont l'une est donnée par $x \mapsto -2\arctan(\operatorname{ch}(x))$. Par la question précédente, on en déduit que

$$\exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad f(x) = -2\arctan(\operatorname{ch}(x)) + C$$

Or d'une part $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et d'autre part $\operatorname{ch}(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc par composition,

$$\lim_{x\to+\infty} -2\arctan(\operatorname{ch}(x)) = -2\frac{\pi}{2} = -\pi.$$

Donc par passage à la limite,

$$0 = -\pi + C \qquad \Leftrightarrow \qquad C = \pi.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad f(x) = \pi - 2\arctan(\operatorname{ch}(x)).}$$

(b) Puisque la fonction f est paire, pour tout $x \in \mathbb{R}_-^*$, on a $y = -x \in \mathbb{R}_+^*$ et donc par la question précédente,

$$f(x) = f(-x) = f(y) = \pi - 2\arctan(\operatorname{ch}(y)) = \pi - 2\arctan(\operatorname{ch}(-x)) = \pi - 2\arctan(\operatorname{ch}(x))$$

car la fonction ch est aussi paire. Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_-^*, \qquad f(x) = \pi - 2\arctan(\operatorname{ch}(x)).}$$

Partie 3 : Simplification de f, méthode 2.

Soit $y \in]1;+\infty[$

12. On a

$$0 < \frac{1}{y} < 1.$$

Donc par la stricte croissance de la fonction arctan,

$$0 < \arctan\left(\frac{1}{y}\right) < \frac{\pi}{4} \qquad \Rightarrow \qquad 0 < 2\arctan\left(\frac{1}{y}\right) < \frac{\pi}{2}.$$

Conclusion,

$$\boxed{2\arctan\left(\frac{1}{y}\right) \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[.}$$

13. Par la question précédente, $2\arctan\left(\frac{1}{y}\right) \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ et donc $\tan\left(2\arctan\left(\frac{1}{y}\right)\right)$ existe. Posons $a = \arctan\left(\frac{1}{y}\right)$. On a également vu que $a \in \left]0;\frac{\pi}{4}\right[\subseteq \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$. Donc $\tan(a)$ existe. Ainsi, il est possible d'appliquer la formule :

$$\tan\left(2\arctan\left(\frac{1}{y}\right)\right) = \tan(2a) = \frac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)} = \frac{2\tan\left(\arctan\left(\frac{1}{y}\right)\right)}{1-\tan^2\left(\arctan\left(\frac{1}{y}\right)\right)} = \frac{2\frac{1}{y}}{1-\frac{1}{y^2}} = \frac{2y}{y^2-1},$$

car $y \neq 0$. Conclusion,

$$\boxed{\forall y \in]1;+\infty[, \qquad \tan\left(2\arctan\left(\frac{1}{y}\right)\right) = \frac{2y}{y^2-1}.}$$

14. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Prenons $y = \operatorname{ch}(x)$. Alors, $y \in]1; +\infty[$. Donc par la question précédente,

$$\tan\left(2\arctan\left(\frac{1}{\operatorname{ch}(x)}\right)\right) = \frac{2\operatorname{ch}(x)}{\operatorname{ch}^2(x) - 1} = \frac{2\operatorname{ch}(x)}{\operatorname{sh}^2(x)}.$$

Ainsi,

$$\arctan\left(\tan\left(2\arctan\left(\frac{1}{\operatorname{ch}(x)}\right)\right)\right) = f(x).$$

Or $2\arctan\left(\frac{1}{\operatorname{ch}(x)}\right) = 2\arctan\left(\frac{1}{y}\right) \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ (vu en question 12.). Donc

$$f(x) = 2\arctan\left(\frac{1}{\operatorname{ch}(x)}\right).$$

De plus, on sait que pour tout $y \in \mathbb{R}_+^*$ (et donc notamment $y > 1$), on a $\arctan\left(\frac{1}{y}\right) + \arctan(y) = \frac{\pi}{2}$. Ainsi,

$$f(x) = 2\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\operatorname{ch}(x)\right)\right) = \pi - 2\arctan\left(\operatorname{ch}(x)\right).$$

Conclusion, on retrouve bien le résultat de la question 11.a

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f(x) = \pi - 2\arctan\left(\operatorname{ch}(x)\right).}$$

Problème II - Intégrales

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_n = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln^n(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Partie 1 : Etude de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \in [1;\mathrm{e}]$, $t > 0$ (et donc notamment $t \neq 0$). Donc la fonction $t \mapsto \frac{\ln^n(t)}{t^2}$ est continue sur $[1;\mathrm{e}]$. Conclusion,

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ l'intégrale } I_n \text{ existe.}}$$

2. Si $n = 0$, alors, on a directement

$$I_0 = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{t}\right]_{t=1}^{t=\mathrm{e}} = -\frac{1}{\mathrm{e}} + 1.$$

Conclusion,

$$\boxed{I_0 = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}}.}$$

3. Si $n = 1$, alors

$$I_1 = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Posons

$$\forall t \in [1;\mathrm{e}]\,, \qquad \begin{cases} u(t) = -\frac{1}{t} \\ v(t) = \ln(t). \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur $[1;\mathrm{e}]$ et

$$\forall t \in [1;\mathrm{e}]\,, \qquad \begin{cases} u'(t) = \frac{1}{t^2} \\ v'(t) = \frac{1}{t}. \end{cases}$$

Donc par intégration par parties,

$$\begin{aligned} I_1 &= \left[-\frac{1}{t}\ln(t)\right]_{t=1}^{t=\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} -\frac{1}{t}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{\mathrm{e}} + 0 + \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{\mathrm{e}} + I_0 \\ &= -\frac{1}{\mathrm{e}} + 1 - \frac{1}{\mathrm{e}} \qquad \text{par la question précédente.} \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{I_1 = 1 - \frac{2}{\mathrm{e}}.}$$

4. Posons pour tout $t \in [1;\mathrm{e}]$, $s = \frac{1}{t}$. Alors, $t = \frac{1}{s}$ et donc $\mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{d}s}{s^2}$. Dès lors,

$$\begin{aligned} I_1 = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t &= \int_1^{\frac{1}{\mathrm{e}}} \frac{\ln\left(\frac{1}{s}\right)}{\frac{1}{s^2}} \times \left(-\frac{\mathrm{d}s}{s^2}\right) \\ &= \int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^1 -\ln(s)\,\mathrm{d}s \\ &= -\left[s\ln(s) - s\right]_{s=1/\mathrm{e}}^{s=1} \\ &= -\left(-1 - \frac{1}{\mathrm{e}}\ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right) - \frac{1}{\mathrm{e}}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{\mathrm{e}} - \frac{1}{\mathrm{e}} \\ &= 1 - \frac{2}{\mathrm{e}}. \end{aligned}$$

Conclusion, on retrouve bien que

$$\boxed{I_1 = 1 - \frac{2}{\mathrm{e}}.}$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \in [1;\mathrm{e}]$, posons $x = \ln(t)$ i.e. $t = \mathrm{e}^x$ et donc $\mathrm{d}t = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$. Alors,

$$I_n = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln^n(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{x^n}{\mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad I_n = \int_0^1 x^n\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.}$$

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par décroissance de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$, on observe que pour tout $x \in [0;1]$,

$$0 \leqslant \mathrm{e}^{-1} \leqslant \mathrm{e}^{-x} \leqslant \mathrm{e}^{-0} = 1.$$

Donc pour tout $x \in [0;1]$,

$$0 \leqslant x^n\,\mathrm{e}^{-x} \leqslant x^n.$$

Par croissance de l'intégrale CAR $0 \leqslant 1$, on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^1 0\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x \qquad &\Leftrightarrow \qquad 0 \leqslant I_n \leqslant \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_{x=0}^{x=1} \\ &\Leftrightarrow \qquad 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1} - 0. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}.}$$

7. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$. Donc par le théorème d'encadrement,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = 0.}$$

8. On procède à une intégration par parties.

Méthode 1 : à l'aide de l'expression initiale. Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons

$$\forall t \in [1;\mathrm{e}], \qquad \begin{cases} u(t) = -\frac{1}{t} \\ v(t) = \ln^{n+1}(t). \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur $[1;\mathrm{e}]$ et

$$\forall t \in [1;\mathrm{e}]\,, \qquad \begin{cases} u'(t) = \frac{1}{t^2} \\ v'(t) = \frac{n+1}{t}\ln^n(t). \end{cases}$$

Donc par intégration par parties,

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln^{n+1}(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[-\frac{1}{t}\ln^{n+1}(t)\right]_{t=1}^{t=\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} -\frac{1}{t}\frac{n+1}{t}\ln^n(t)\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{\mathrm{e}} + 0 + \int_1^{\mathrm{e}} (n+1)\,\frac{\ln^n(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad I_{n+1} = (n+1)\,I_n - \frac{1}{\mathrm{e}}.}$$

Méthode 2 : à l'aide du résultat de la question 5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons

$$\forall x \in [0;1]\,, \qquad \begin{cases} u(x) = -\,\mathrm{e}^{-x} \\ v(x) = x^{n+1}. \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur $[0;1]$ et

$$\forall x \in [0;1]\,, \qquad \begin{cases} u'(x) = \mathrm{e}^{-x} \\ v'(x) = (n+1)\,x^n. \end{cases}$$

Donc par intégration par parties,

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_0^1 x^{n+1}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[-x^{n+1}\,\mathrm{e}^{-x}\right]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 -\,\mathrm{e}^{-x}\,(n+1)\,x^n\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{\mathrm{e}} + 0 + \int_0^1 (n+1)\,x^n\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad I_{n+1} = (n+1)\,I_n - \frac{1}{\mathrm{e}}.}$$

9. Par la question précédente, pour $n = 1$, on a

$$I_2 = 2I_1 - \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

Donc par la question 3. ou 4. on obtient

$$I_2 = 2\left(1 - \frac{2}{\mathrm{e}}\right) - \frac{1}{\mathrm{e}} = 2 - \frac{5}{\mathrm{e}}.$$

Conclusion,

$$\boxed{I_2 = 2 - \frac{5}{\mathrm{e}}.}$$

Partie 2 : Approximation de e.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

10. On procède par récurrence. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathscr{P}(n) : \qquad « \, I_n = n! \left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}} S_n\right) \, ».$$

Initialisation. Si $n = 0$. On a par la question 2.

$$I_0 = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

D'autre part,

$$n! \left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}} S_n\right) = 0! \left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}} S_0\right) = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}} \sum_{k=0}^{0} \frac{1}{0!} = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ i.e. $I_n = n! \left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}} S_n\right)$ et montrons $\mathscr{P}(n+1)$. Par la question 8.

$$I_{n+1} = (n+1)\, I_n - \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

Donc par hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= (n+1)\, n! \left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}} S_n\right) - \frac{1}{\mathrm{e}} \\ &= (n+1)! \left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right) - \frac{1}{\mathrm{e}} \\ &= (n+1)! \left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} - \frac{1}{\mathrm{e}} \frac{1}{(n+1)!}\right) \\ &= (n+1)! \left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}} \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!}\right) \\ &= (n+1)! \left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}} S_{n+1}\right). \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie i.e.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad I_n = n! \left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}} S_n\right).}$$

11. Par la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\frac{I_n}{n!} = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}} S_n \qquad \Leftrightarrow \qquad S_n = \mathrm{e} \left(1 - \frac{I_n}{n!}\right).$$

Or par la question 7. $I_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ et $n! \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Donc la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} \mathrm{e} \left(1 - \frac{I_n}{n!}\right) = \mathrm{e}\,(1 - 0) = \mathrm{e}\,.$$

Conclusion,

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} S_n = \mathrm{e}\,.}$$

12. Par la question 6. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$. Donc

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leqslant \frac{I_n}{n!} \leqslant \frac{1}{(n+1)!} \qquad &\Rightarrow \qquad -\frac{1}{(n+1)!} \leqslant -\frac{I_n}{n!} \leqslant 0 \\
&\Rightarrow \qquad \mathrm{e}\left(1 - \frac{1}{(n+1)!}\right) \leqslant \mathrm{e}\left(1 - \frac{I_n}{n!}\right) \leqslant \mathrm{e} \\
&\Rightarrow \qquad \mathrm{e} - \frac{\mathrm{e}}{(n+1)!} \leqslant S_n \leqslant \mathrm{e} \\
&\Rightarrow \qquad -\frac{\mathrm{e}}{(n+1)!} \leqslant S_n - \mathrm{e} \leqslant 0 \\
&\Rightarrow \qquad |S_n - \mathrm{e}| \leqslant \frac{\mathrm{e}}{(n+1)!} \leqslant \frac{3}{(n+1)!}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |S_n - \mathrm{e}| \leqslant \frac{3}{(n+1)!}.}$$

Problème III - Equations différentielles

On considère l'équation différentielle suivante d'inconnue φ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$(E_0) \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad x\,\varphi'(x) + \varphi(x) = 0.$$

1. Soit φ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Puisque $x \neq 0$, on a

$$(E_0) \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \varphi'(x) + \frac{1}{x}\,\varphi(x) = 0.$$

La fonction $a : x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc admet des primitives sur cet intervalle dont l'une est donnée par $A : x \mapsto \ln(x)$. Ainsi, l'ensemble des solutions de (E_0) est donné par

$$\mathscr{S}_{E_0} = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & C\,\mathrm{e}^{-\ln(x)} \end{array} \,\middle|\, C \in \mathbb{R} \right\}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{S}_{E_0} = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{C}{x} \end{array} \,\middle|\, C \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array} \right).}$$

Partie 1 : Equations différentielles d'ordre 1

Soient b une fonction continue sur $]0;2[$ et (E) l'équation différentielle d'inconnue φ une fonction dérivable sur $]0;2[$ définie par

$$(E) \qquad \forall x \in \,]0;2[\,, \qquad x\,\varphi'(x) + \varphi(x) = b(x)$$

On note $\mathscr{S}_E$ l'ensemble des solutions de (E).

2. On note B une primitive de b sur $]0;2[$. Soit φ une fonction dérivable sur $]0;2[$. Notons

$$\varphi_0 \;:\; \begin{array}{ccc}]0;2[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x}. \end{array}$$

Par la question précédente, on sait que φ_0 est une solution de l'équation homogène associée à (E) Soit $\lambda : \begin{array}{ccc}]0;2[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\varphi(x)}{\varphi_0(x)} \end{array}$ qui est bien définie car pour tout $x \in \,]0;2[$, $\varphi_0(x) \neq 0$. De plus en tant que quotient de fonctions dérivables sur $]0;2[$ dont le dénominateur ne s'annule pas, λ est dérivable sur $]0;2[$ et pour tout $x \in \,]0;2[$, $\varphi(x) = \lambda(x)\,\varphi_0(x)$. Dès lors, on a

$$\begin{aligned}
\varphi \text{ solution de } (E) \quad &\Leftrightarrow \quad \forall x \in \,]0;2[\,, \quad \varphi'(x) + \frac{1}{x}\,\varphi(x) = \frac{b(x)}{x} \\
&\Leftrightarrow \quad \forall x \in \,]0;2[\,, \quad \lambda'(x)\,\varphi_0(x) + \lambda(x)\,\varphi_0'(x) + \frac{1}{x}\,\lambda(x)\,\varphi_0(x) = \frac{b(x)}{x} \\
&\Leftrightarrow \quad \forall x \in \,]0;2[\,, \quad \lambda'(x)\,\varphi_0(x) + \lambda(x)\,\underbrace{\left(\varphi_0'(x) + \frac{1}{x}\,\varphi_0(x)\right)}_{=0 \text{ car } \varphi_0 \text{ solution homogène}} = \frac{b(x)}{x} \\
&\Leftrightarrow \quad \forall x \in \,]0;2[\,, \quad \frac{\lambda'(x)}{x} = \frac{b(x)}{x} \\
&\Leftrightarrow \quad \forall x \in \,]0;2[\,, \quad \lambda'(x) = b(x).
\end{aligned}$$

Puisque B est une primitive de b sur $]0;2[$:

$$\begin{aligned}
y \text{ solution de } (E) \quad &\Leftrightarrow \quad \exists C \in \mathbb{C},\ \forall x \in \,]0;2[\,, \quad \lambda(x) = B(x) + C \\
&\Leftrightarrow \quad \exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in \,]0;2[\,, \quad \varphi(x) = \lambda(x)\,\varphi_0(x) = \frac{B(x)+C}{x}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{S}_E = \left\{ \begin{array}{rcl}]0;2[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{B(x)+C}{x} \end{array} \middle| \, C \in \mathbb{R} \right\}.}$$

3. Soit $b_0 : \begin{array}{rcl}]0;2[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x^2-\frac{3}{2}x-1} \end{array}$. Soit Δ le discriminant associé à $X^2 - \frac{3}{2}X - 1$. On a $\Delta = \frac{9}{4} + 4 = \frac{25}{4}$.

Donc les racines de $X^2 - \frac{3}{2}X - 1$ sont $\frac{\frac{3}{2}+\frac{5}{2}}{2} = \frac{8}{4} = 2$ et $\frac{\frac{3}{2}-\frac{5}{2}}{2} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$. Puisque $-\frac{1}{2} < 0$. On en déduit que

$$\forall x \in]0;2[\,, \qquad x^2 - \frac{3}{2}x - 1 \neq 0.$$

Donc la fonction b_0 est bien définie et même continue sur $]0;2[$. Ainsi,

$$\boxed{\text{la fonction } b_0 \text{ admet des primitives sur }]0;2[.}$$

De plus, pour $x \in]0;2[$, on a

$$b_0(x) = \frac{1}{x^2 - \frac{3}{2}x - 1} = \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-2)}.$$

Par le théorème de décomposition en éléments simples, on sait qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall x \in]0;2[\,, \qquad b_0(x) = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+\frac{1}{2}}.$$

Méthode 1. Pour tout $x \in]0;2[$,

$$(x-2)\,b_0(x) = \frac{1}{x+\frac{1}{2}} = a + (x-2)\frac{b}{x+\frac{1}{2}}.$$

Donc par passage à la limite quand $x \to 2$,

$$a = \frac{1}{2+\frac{1}{2}} = \frac{2}{5}.$$

De même, cette égalité peut s'étendre à l'intervalle $\left]-\frac{1}{2};2\right[$ et

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)b_0(x) = \frac{1}{x-2} = \left(x+\frac{1}{2}\right)\frac{a}{x-2} + b.$$

Donc par passage à la limite quand $x \to -\frac{1}{2}$,

$$a = \frac{1}{-\frac{1}{2}-2} = -\frac{2}{5}.$$

Donc

$$\forall x \in]0;2[\,, \qquad b_0(x) = \frac{2/5}{x-2} - \frac{2/5}{x+\frac{1}{2}}.$$

Méthode 2. Pour tout $x \in]0;2[$, on a

$$b_0(x) = \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-2)} = \frac{a\left(x+\frac{1}{2}\right) + b\,(x-2)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-2)} = \frac{(a+b)\,x + \frac{a}{2} - 2b}{\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-2)}.$$

On note alors qu'il suffit de prendre

$$\begin{cases} a+b=0 \\ \frac{a}{2} - 2b = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a+b=0 \\ -\frac{5}{2}b = 1 \end{cases} \qquad L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2}L_1$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = -b = \frac{2}{5} \\ b = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

On retrouve bien que
$$\forall x \in \,]0;2[\,, \qquad b_0(x) = \frac{2/5}{x-2} - \frac{2/5}{x+\frac{1}{2}}.$$
Donc la fonction définie pour tout $x \in \,]0;2[$,
$$B_0(x) = \frac{2}{5}\left(\ln\left(|x-2|\right) - \ln\left(\left|x+\frac{1}{2}\right|\right)\right) = \frac{2}{5}\ln\left(\frac{2-x}{x+\frac{1}{2}}\right)$$
est une primitive de b_0. Conclusion, l'ensemble des primitives de b_0 est donné par
$$\boxed{\mathscr{S}_{b_0} = \left\{ \begin{array}{ccc}]0;2[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{2}{5}\ln\left(\frac{2-x}{x+\frac{1}{2}}\right) + C \end{array} \;\middle|\; C \in \mathbb{R} \right\}.}$$

4. Soit $b_1 : \begin{array}{ccc}]0;2[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 6xb_0(x) = \frac{6x}{x^2 - \frac{3}{2}x - 1}. \end{array}$ Posons pour tout $x \in \,]0;2[$, $u(x) = x^2 - \frac{3}{2}x - 1$. La fonction u est dérivable sur $]0;2[$ (et même sur $\mathbb{R}$) et pour tout $x \in \,]0;2[$,
$$u'(x) = 2x - \frac{3}{2}.$$
Alors, on observe que (après une division euclidienne si nécessaire)
$$6x = 3\left(2x - \frac{3}{2}\right) + \frac{9}{2}.$$
Donc
$$\forall x \in \,]0;2[\,, \qquad b_1(x) = 3\frac{u'(x)}{u(x)} + \frac{9}{2}b_0(x).$$
Donc, à l'aide de la question précédente, une primitive de b_1 est donnée pour tout $x \in \,]0;2[$ par
$$\begin{aligned} B_1(x) &= 3\ln\left(|u(x)|\right) + \frac{9}{2} \times \frac{2}{5}\ln\left(\frac{2-x}{x+\frac{1}{2}}\right) \\ &= 3\ln\left(1 + \frac{3}{2}x - x^2\right) + \frac{9}{5}\ln\left(\frac{2-x}{x+\frac{1}{2}}\right) \\ &= 3\ln\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)(2-x)\right) + \frac{9}{5}\ln\left(\frac{2-x}{x+\frac{1}{2}}\right) \\ &= 3\ln\left(x+\frac{1}{2}\right) + 3\ln(2-x) + \frac{9}{5}\ln(2-x) - \frac{9}{5}\ln\left(x+\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{24}{5}\ln(2-x) - \frac{6}{5}\ln\left(x+\frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$
Conclusion, l'ensemble des primitives de b_1 est donné par
$$\boxed{\mathscr{S}_{b_1} = \left\{ \begin{array}{ccc}]0;2[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{24}{5}\ln(2-x) - \frac{6}{5}\ln\left(x+\frac{1}{2}\right) + C \end{array} \;\middle|\; C \in \mathbb{R} \right\}.}$$

5. Par la question précédente, B_1 est une primitive de b_1. Donc par la question 2., on a directement,
$$\boxed{\mathscr{S}_{E} = \left\{ \begin{array}{ccc}]0;2[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\frac{24}{5}\ln(2-x) - \frac{6}{5}\ln\left(x+\frac{1}{2}\right) + C}{x} \end{array} \;\middle|\; C \in \mathbb{R} \right\}.}$$

6. Soit $b_2 : \begin{array}{ccc}]0;2[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x^2-\frac{3}{2}x+1} \end{array}$. Soit Δ le discriminant associé à $X^2-\frac{3}{2}X+1$, on a $\Delta=\frac{9}{4}-4=-\frac{7}{4}<0$. Donc la fonction b_2 est bien continue sur $]0;2[$ et admet des primitives sur cet intervalle. Faisons apparaître la dérivée de la fonction arctangente. Pour tout $x\in]0;2[$, on a

$$b_2(x)=\frac{1}{\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{16}+1}=\frac{1}{\left(x+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{7}{16}}=\frac{16}{7}\frac{1}{\left(\frac{x+\frac{3}{4}}{\frac{\sqrt{7}}{4}}\right)^2+1}=\frac{16}{7}\frac{1}{1+\left(\frac{4x+3}{\sqrt{7}}\right)^2}.$$

Donc une primitive de b_2 est donnée pour tout $x\in]0;2[$ par

$$B_2(x)=\frac{16}{7}\frac{\sqrt{7}}{4}\arctan\left(\frac{4x+3}{\sqrt{7}}\right)=\frac{4\sqrt{7}}{7}\arctan\left(\frac{4x+3}{\sqrt{7}}\right).$$

Donc par la question 2. dans ce cas,

$$\boxed{\mathscr{S}_E=\left\{\begin{array}{ccc}]0;2[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\frac{4\sqrt{7}}{7}\arctan\left(\frac{4x+3}{\sqrt{7}}\right)+C}{x} \end{array} \;\middle|\; C\in\mathbb{R}\right\}.}$$

7. *Rédaction 1.* Par ce qui précède, la fonction $x\mapsto\frac{B_1(x)}{x}$ est UNE solution de (E) lorsque $b=b_1$ et $x\mapsto\frac{B_2(x)}{x}$ est UNE solution (E) lorsque $b=b_2$. Donc par le principe de superposition, la fonction $x\mapsto\frac{B_1(x)+B_2(x)}{x}$ est UNE solution de (E) lorsque $b=b_1+b_2$. Donc à l'aide des solutions de l'équation homogène données par la question 1. on obtient que

$$\boxed{\mathscr{S}_E=\left\{\begin{array}{ccc}]0;2[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\frac{24}{5}\ln(2-x)-\frac{6}{5}\ln\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{4\sqrt{7}}{7}\arctan\left(\frac{4x+3}{\sqrt{7}}\right)+C}{x} \end{array} \;\middle|\; C\in\mathbb{R}\right\}.}$$

Rédaction 2. Par ce qui précède, B_1 est une primitive de b_1 et B_2 est une primitive de b_2, donc B_1+B_2 est une primitive de b_1+b_2. Donc par la question 2. on obtient

$$\boxed{\mathscr{S}_E=\left\{\begin{array}{ccc}]0;2[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\frac{24}{5}\ln(2-x)-\frac{6}{5}\ln\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{4\sqrt{7}}{7}\arctan\left(\frac{4x+3}{\sqrt{7}}\right)+C}{x} \end{array} \;\middle|\; C\in\mathbb{R}\right\}.}$$

Partie 2 : Equation différentielle d'ordre 2 à coefficients constants

On considère l'équation différentielle suivante d'inconnue z une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$(F)\qquad \forall t\in\mathbb{R},\qquad z''(t)-2z'(t)+z(t)=t^2+3.$$

8. L'équation homogène associée à (F) est donnée par

$$(F_0)\qquad \forall t\in\mathbb{R},\qquad z''(t)-2z'(t)+z(t)=0.$$

Son équation caractéristique est donnée par (F_c) : $r^2-2r+1=0$ i.e. $(r-1)^2=0$. Donc cette équation admet une unique racine double $r_0=1$. Conclusion, l'ensemble des solutions de l'équation homogène(F_0) est

$$\boxed{\mathscr{S}_{F_0}=\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & (At+B)\,\mathrm{e}^t \end{array} \;\middle|\; (A,B)\in\mathbb{R}^2\right\}=\mathrm{Vect}\left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \mathrm{e}^t \end{array},\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & t\,\mathrm{e}^t \end{array}\right).}$$

9. Cherchons une solution particulière sous forme d'un polynôme du second degré. Soient $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ et $z_p : t \mapsto at^2+bt+c$. La fonction z_p est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et l'on a les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{rcll} z_p \text{ solution de } (F) & \Leftrightarrow & \forall t \in \mathbb{R}, & 2a - 2\,(2at+b) + at^2 + bt + c = t^2 + 3 \\ & \Leftrightarrow & \forall t \in \mathbb{R}, & at^2 + (b-4a)\,t + 2a - 2b + c = t^2 + 3. \end{array}$$

Pour que la dernière assertion soit vraie, on note qu'il suffit de prendre

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - 4a = 0 \\ 2a - 2b + c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 4a = 4 \\ c = 3 - 2a + 2b = 3 - 2 + 8 = 9. \end{cases}$$

Donc $z_p : t \mapsto t^2 + 4t + 9$ est une solution de (F). Conclusion, à l'aide de la question précédente, l'ensemble des solutions de (F) est donné par

$$\boxed{\mathscr{S}_F = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & t^2 + 4t + 9 + (At+B)\,\mathrm{e}^t \end{array} \,\middle|\, (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.}$$

Partie 3 : Equation différentielle d'ordre 2 à coefficients non constants

On considère l'équation suivante d'inconnue y une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$(G) \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad x^2 y''(x) - xy'(x) + y(x) = 0.$$

10. Soit y une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. On pose $\psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{y(x)}{x} \end{array}$ puis $\varphi = \psi'$.

(a) La fonction y est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$ aussi (car $x \neq 0$). Donc par produit, la fonction ψ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. D'où,

$$\boxed{\text{la fonction } \varphi \text{ est bien définie et même dérivable sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $y(x) = x\psi(x)$. Donc $y'(x) = \psi(x) + x\,\varphi(x)$ et $y''(x) = \varphi(x) + \varphi(x) + x\,\varphi'(x) = x\,\varphi'(x) + 2\,\varphi(x)$. Dès lors, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{clll} & y \text{ est solution de } (G) & & \\ \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}_+^*, & x^2\left(x\,\varphi'(x) + 2\,\varphi(x)\right) - x\,(x\,\varphi(x) + \psi(x)) + x\psi(x) = 0 & \\ \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}_+^*, & x^3\,\varphi'(x) + x^2\,\varphi(x) = 0 & \\ \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}_+^*, & x\,\varphi'(x) + \varphi(x) = 0 & \text{car } x \neq 0 \\ \Leftrightarrow & \varphi \text{ est solution de } (E_0) & & \end{array}$$

Conclusion, on a bien

$$\boxed{y \text{ est solution de } (G) \qquad \Leftrightarrow \qquad \varphi \text{ est solution de } (E_0).}$$

(b) Avec les notations de la question précédente, par la question 1. on obtient :

$$\begin{array}{rcll} y \text{ est solution de } (G) & \Leftrightarrow & \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, & \varphi(x) = \dfrac{A}{x} \\ & \Leftrightarrow & \exists\,(A,B) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, & \psi(x) = A\ln(|x|) + B \\ & \Leftrightarrow & \exists\,(A,B) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, & y(x) = x\psi(x) = Ax\ln(|x|) + Bx. \end{array}$$

Conclusion, l'ensemble des solutions de (G) est donné par

$$\boxed{\mathscr{S}_G = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & Ax\ln(x) + Bx \end{array} \,\middle|\, (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.}$$

11. Soit y une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. On pose pour tout $t \in \mathbb{R}$, $z(t) = y\left(\mathrm{e}^t\right)$.

(a) La fonction exponentielle est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. Donc par composition,

$$\boxed{\text{la fonction } z = y \circ \exp \text{ est deux fois dérivable sur } \mathbb{R}.}$$

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$y(x) = z\left(\ln(x)\right), \qquad y'(x) = \frac{1}{x} z'\left(\ln(x)\right), \qquad y''(x) = -\frac{1}{x^2} z'\left(\ln(x)\right) + \frac{1}{x^2} z''\left(\ln(x)\right).$$

Dès lors, on obtient les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} & y \text{ est solution de } (G) \\ \Leftrightarrow \quad & \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad x^2\left(\frac{1}{x^2} z''\left(\ln(x)\right) - \frac{1}{x^2} z'\left(\ln(x)\right)\right) - x\left(\frac{1}{x} z'\left(\ln(x)\right)\right) + z\left(\ln(x)\right) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad z''\left(\ln(x)\right) - z'\left(\ln(x)\right) - z'\left(\ln(x)\right) + z\left(\ln(x)\right) = 0. \end{aligned}$$

En posant $x = \mathrm{e}^t$ i.e. $t = \ln(x)$, lorsque x décrit $\mathbb{R}_+^*$, t décrit $\mathbb{R}$ et on obtient donc

$$y \text{ est solution de } (G) \quad \Leftrightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad z''(t) - 2z'(t) + z(t) = 0.$$

Conclusion,

$$\boxed{y \text{ est solution de } (G) \quad \Leftrightarrow \quad z \text{ est solution de } (F_0).}$$

(b) Avec les notations de la question précédente, par la question 8.

$$\begin{aligned} & y \text{ est solution de } (G) \\ \Leftrightarrow \quad & \exists (A,B) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t \in \mathbb{R}, \quad z(t) = (At + B)\,\mathrm{e}^t \\ \Leftrightarrow \quad & \exists (A,B) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad y(x) = z\left(\ln(x)\right) = \left(A\ln(x) + B\right)x \end{aligned}$$

Conclusion, on retrouve bien que l'ensemble des solutions de (G) est donné par

$$\boxed{\mathscr{S}_G = \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & Ax\ln(x) + Bx \end{array} \,\middle|\, (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.}$$

Partie 4 : Une équation fonctionnelle

(Si jamais ce sujet de 6h vous semble trop court...)

On considère l'équation fonctionnelle suivante d'inconnue f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$(H) \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f'(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right).$$

12. Soit f une solution de (H). Par hypothèse, la fonction f est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right)$. Or les fonctions $x \mapsto x$, f et $x \mapsto \frac{1}{x}$ sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc par composition et produit, la fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$. Autrement dit : la fonction f est deux fois dérivable. Dès lors, en dérivant l'équation H on obtient que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f''(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2} x f'\left(\frac{1}{x}\right) = f\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} f'\left(\frac{1}{x}\right)$$

Or par l'équation (H) utilisée avec $\tilde{x} = \frac{1}{x} \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$f'\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} f(x).$$

Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f''(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2} f(x)$$

On obtient alors que

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad x^2 f''(x) - x f'(x) + f(x) &= x^2 \left(f\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2} f(x)\right) - x\left(x f\left(\frac{1}{x}\right)\right) + f(x)\\ &= x^2 f\left(\frac{1}{x}\right) - f(x) - x^2 f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{f \text{ est solution de } (H) \qquad \Rightarrow \qquad f \text{ est solution de } (G).}$$

13. Par la question précédente, si f est une solution de (H) alors f est une solution de (G). Donc par la partie 3,

$$\exists\,(A,B) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f(x) = Ax\ln(x) + Bx.$$

Procédons à la synthèse et cherchons parmi les fonctions de ce type, lesquelles sont solutions de (H). Soit $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ et soit $f : x \mapsto Ax\ln(x) + Bx$. Alors, f est bien dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, d'une part,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f'(x) = A\ln(x) + \frac{Ax}{x} + B = A\ln(x) + A + B.$$

D'autre part,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad x f\left(\frac{1}{x}\right) = x\left(A\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1}{x}\right) + B\frac{1}{x}\right) = -A\ln(x) + B.$$

Dès lors, on a

$$f \text{ solution de } (H) \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad A\ln(x) + A + B = -A\ln(x) + B.$$

En particulier, pour $x = 1$, on trouve qu'il faut prendre $A + B = B$ i.e. $A = 0$. Réciproquement, si $A = 0$, on a bien $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $A\ln(x) + A + B = -A\ln(x) + B$. D'où

$$f \text{ solution de } (H) \qquad \Leftrightarrow \qquad A = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f(x) = Bx.$$

Conclusion, l'ensemble des solutions de (H) est donné par

$$\boxed{\mathscr{S}_H = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & Bx \end{array} \,\middle|\, B \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array} \right).}$$