Epreuve de mathématiques 5
2021-2022

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé
Durée : 4h

Encadrer les résultats et numéroter les copies

Problème 1 - Matrices

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. On pose $N = A - I_3$.

Partie 1 : Un peu de calculs

1. Calculer N, N^2 puis vérifier que $N^3 = 0_3$.
2. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose

$$\mathscr{S}_\lambda = \left\{ X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; AX = \lambda\, X \right\}.$$

   Déterminer selon la valeur de λ, l'ensemble $\mathscr{S}_\lambda$.

Partie 2 : Méthode 1, par le binôme de Newton

3. A l'aide de la formule du binôme de Newton, déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n.
4. Préciser A^5.

Partie 3 : Méthode 2, par la division euclidienne

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on admet l'existence de trois réels $(a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{R}^3$ et d'un polynôme Q_n tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad x^n = (x-1)^3\, Q_n(x) + a_n x^2 + b_n x + c_n.$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Dériver deux fois l'égalité précédente.
6. En déduire en fonction de $n \geqslant 2$ les coefficients a_n, b_n et c_n.
   On donnera les expressions factorisées.
7. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$ une expression de A^n en fonction de n, A et A^2.
8. Retrouver la valeur de A^5.

Partie 4 : Racines carrées de T

On pose $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $M = T - I_3$. On s'intéresse à déterminer l'ensemble des racines carrées de T :

$$\mathscr{R}_T = \left\{ S \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \;\middle|\; S^2 = T \right\}.$$

Pour ce faire, on pose également $\mathscr{C}_T$ l'ensemble des matrices commutant avec T :

$$\mathscr{C}_T = \{ S \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid TS = ST \}.$$

On admet que $\mathscr{C}_T = \{ aI_3 + bM + cM^2 \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \}$.

9. Montrer que $\mathscr{R}_T \subseteq \mathscr{C}_T$.
10. En déduire que $\mathscr{R}_T$ est un ensemble ne contenant que deux matrices que l'on déterminera.

Partie 5 : Racines carrées de A

On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

11. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
12. Calculer $P^{-1}AP$.

On considère
$$\mathscr{R}_A = \left\{ B \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \;\middle|\; B^2 = A \right\}.$$

13. Montrer que $B \in \mathscr{R}_A$ si et seulement si $S = P^{-1}BP \in \mathscr{R}_T$.
14. En déduire $\mathscr{R}_A$.

Problème 2 - Analyse Asymptotique

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la FONCTION ITÉRÉE $n^{\text{IÈME}}$ de l' arctangente, que l'on note $\arctan^{[n]}$, par :

$$\arctan^{[n]} = \underbrace{\arctan \circ \arctan \circ \cdots \circ \arctan}_{n \text{ fois}}$$

où $\circ$ désigne la composition entre fonctions.

Partie 1 : L'itérée première

Soit $p \in \mathbb{N}$.

1. Préciser le développement limité à l'ordre $2p$ en 0 de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$.
2. En déduire le développement limité à l'ordre $2p+1$ en 0 de arctan.
3. Déterminer un équivalent en 0 de $x \mapsto \frac{1}{\operatorname{sh}(2x)} - \frac{1}{\arctan(2x)}$.
4. On considère la fonction
$$f : x \mapsto x^{3/2}\sqrt{\frac{\pi}{2} - \arctan(x+1)}.$$
Montrer que f admet une asymptote en $+\infty$, déterminer son équation et préciser la position de la courbe de f par rapport à son asymptote au voisinage de $+\infty$.

Partie 2 : L'itérée deuxième

5. Déterminer le développement limité à l'ordre 5 en 0 de $\arctan^{[2]} = \arctan \circ \arctan$.
6. On considère la fonction g définie par
$$g : x \mapsto \left(\frac{\arctan^{[2]}(x)}{x}\right)^{\frac{\cos(x)}{x}}.$$
Montrer que g est prolongeable par continuité en 0 et que son prolongement $\tilde{g}$ est dérivable en 0. Préciser la tangente de $\tilde{g}$ en 0 et la position de la courbe de $\tilde{g}$ par rapport à cette tangente au voisinage de 0. Représenter sur votre copie l'allure locale de la courbe de $\tilde{g}$ au voisinage de 0.

Partie 3 : L'itérée n-ième

7. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\arctan^{[n]}$ est définie sur $\mathbb{R}$ et impaire.
8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier que $\arctan^{[n]}$ admet un développement limité à tout ordre en 0 et préciser sa forme.

On admet dans la suite qu'il existe trois suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\arctan^{[n]}(x) \underset{x\to 0}{=} a_n x + b_n x^3 + c_n x^5 + o\left(x^5\right).$$

9. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer le développement à l'ordre 5 de $\arctan^{[n+1]} = \arctan^{[n]} \circ \arctan$ en fonction de a_n, b_n et c_n.
10. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ une formule de récurrence de a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1} en fonction de a_n, b_n, c_n.
11. Préciser quelle suite de référence est $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, puis donner a_n en fonction de n.
12. Préciser quelle suite de référence est $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, puis donner b_n en fonction de n.
13. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. On considère la somme suivante :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} (c_{k+1} - c_k),$$

Exprimer S_n de deux façons : l'une en fonction de c_n et l'autre en fonction de n.

14. En déduire le développement à l'ordre 5 en 0 de $\arctan^{[n]}$
15. Vérifier la cohérence avec des résultats obtenus dans les parties précédentes.

Exercice 3 - Ensembles et Applications

Soient E et F deux ensembles, $f \in \mathscr{F}(E, F)$. On pose alors

$$\varphi : \begin{array}{rcl} \mathscr{P}(E) & \to & \mathscr{P}(F) \\ A & \mapsto & f(A). \end{array}$$

1. Démontrer que f injective $\Rightarrow$ φ injective.
2. Démontrer la réciproque.
   Pour $x \in E$ et $y \in E$, on pourra considérer les singletons $\{x\}$ et $\{y\}$ et leurs images par φ.
3. Soit $B \in \mathscr{P}(F)$. On pose $A = f^{-1}(B)$.
   (a) Montrer que $f(A) \subseteq B$.
   (b) On suppose dans cette question que f est surjective. Montrer que $f(A) = B$.
4. Montrer que f surjective $\Leftrightarrow$ φ surjective.
5. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que φ soit bijective et dans ce cas, préciser sans justification φ^{-1}.

Problème 4 - Continuité - Dérivabilité

Partie 1 : Un résultat de concavité

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$ et $g : [a;b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a;b]$ et deux fois dérivable sur $]a;b[$. On suppose que pour tout $x \in]a;b[$, $g''(x) \geqslant 0$ et on note

$$\forall x \in]a;b[\,, \qquad \tau(x) = \frac{g(x) - g(a)}{x - a}.$$

1. Justifier que τ est $\mathscr{C}^1$ sur $]a;b[$ et calculer sa dérivée.
2. Soit $x \in]a;b[$. Montrer qu'il existe $c_x \in]a;x[$ tel que $\tau'(x) = \frac{g'(x) - g'(c_x)}{x-a}$.
3. Conclure que τ est croissante sur $]a;b[$.

Partie 2 : Une application

Soit

$$f : \begin{array}{ccc}]0;1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\arcsin\left(x^2\right)}{x} \end{array}$$

4. A l'aide de la partie précédente démontrer que f est croissante sur $]0;1[$.
5. Calculer la dérivée de f sur $]0;1[$.
6. En déduire que pour tout $t \in]0;1[$, $\arcsin(t) \leqslant \frac{2t}{\sqrt{1-t^2}}$.
7. Montrer que pour tout $x \in]0;1[$, $f'(x) \leqslant \frac{2}{\sqrt{1-x^4}}$.
8. Montrer que f est $\frac{4}{\sqrt{3}}$-lipschitzienne sur $\left]0;\frac{1}{\sqrt{2}}\right[$.

Partie 3 : Une fonction par morceaux

On considère

$$\varphi : \begin{array}{ccc} [-1;1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \frac{\arcsin\left(x^2\right)}{x} & \text{si } x \in]0;1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x & \text{si } x \in [-1;0[\,. \end{cases} \end{array}$$

9. Justifier que φ est continue sur $[-1;1]$.
10. Montrer que φ est $\mathscr{C}^1$ sur $]-1;1[$.
11. (a) Calculer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $x \mapsto \arcsin(x)$.
    (b) Montrer que φ n'est pas $\mathscr{C}^5$ en 0.