# Corrigé du Devoir Surveillé 5
# Matrices, analyse asymptotique, ensembles et applications, continuité et dérivabilité

## Problème I - Matrices

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. On pose $N = A - I_3$.

### Partie 1 : Un peu de calculs

1. On a les égalités suivantes :

$$N = A - I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Puis,

$$N^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Enfin,

$$N^3 = NN^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Conclusion,

$$\boxed{N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \qquad N^2 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad N^3 = 0_3.}$$

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
X \in \mathscr{S}_\lambda \quad & \Leftrightarrow \quad AX = \lambda X \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 2x + y + z \\ -x + 2y - z \\ -2x - z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{bmatrix} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (2-\lambda)\, x + y + z = 0 \\ -x + (2-\lambda)\, y - z = 0 \\ -2x - (1+\lambda)\, z = 0 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -x + (2-\lambda)\, y - z = 0 \\ (2-\lambda)\, x + y + z = 0 \\ -2x - (1+\lambda)\, z = 0 \end{cases} \qquad L_1 \leftrightarrow L_2 \ .
\end{aligned}$$

On obtient alors que

$$X \in \mathscr{S}_\lambda \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -x + (2-\lambda)\,y - z = 0 \\ \left(1 + (2-\lambda)^2\right) y + (1 - (2-\lambda))\,z = 0 \\ -2\,(2-\lambda)\,y + (-1 - \lambda + 2)\,z = 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + (2-\lambda)\,L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -x + (2-\lambda)\,y - z = 0 \\ \left(\lambda^2 - 4\lambda + 5\right) y + (\lambda - 1)\,z = 0 \\ 2\,(\lambda - 2)\,y - (\lambda - 1)\,z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -x + (2-\lambda)\,y - z = 0 \\ \left(\lambda^2 - 4\lambda + 5\right) y + (\lambda - 1)\,z = 0 \\ \left(\lambda^2 - 2\lambda + 1\right) y = 0 \end{cases} \qquad L_3 \leftarrow L_3 + L_2$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -x + (2-\lambda)\,y - z = 0 \\ \left(\lambda^2 - 4\lambda + 5\right) y + (\lambda - 1)\,z = 0 \\ (\lambda - 1)^2\,y = 0. \end{cases}$$

Premier cas, $\lambda = 1$. Alors,

$$X \in \mathscr{S}_1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -x + y - z = 0 \\ 2y = 0 \\ 0 = 0. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -x - z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = -z \\ y = 0 \end{cases}$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathscr{S}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, z \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left( \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right).}$$

Deuxième cas, $\lambda \neq 1$. Alors,

$$X \in \mathscr{S}_\lambda \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -x - z = 0 \\ (\lambda - 1)\,z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -x - z = 0 \\ z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \text{car } \lambda \neq 1$$

Dans ce cas,

$$\boxed{\mathscr{S}_\lambda = \{0_{\mathbb{R}^3}\}.}$$

## Partie 2 : Méthode 1, par le binôme de Newton

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition de $N$, on sait que $A = I_3 + N$. De plus, $N^3 = 0_3$ donc pour tout $k \geqslant 3$, $N^k = 0_3$. Or $N$ et $I_3$ commutent. Donc par la formule du binôme de Newton, on a

$$A^n = (I_3 + N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k I_3^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k.$$

Si $n \geqslant 2$,

$$A^n = \binom{n}{0} N^0 + \binom{n}{1} N + \binom{n}{2} N^2 + 0_3 = I_3 + nN + \frac{n(n-1)}{2} N^2.$$

On note que cette formule reste vraie si $n = 0$ ou $n = 1$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2} \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} + \left(n^2 - n\right) \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 + 2n - n^2 & n^2 & 2n - n^2 \\ -n & n+1 & -n \\ n^2 - 3n & n - n^2 & n^2 - 3n + 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad A^n = \begin{pmatrix} 1 + 2n - n^2 & n^2 & 2n - n^2 \\ -n & n+1 & -n \\ n^2 - 3n & n - n^2 & n^2 - 3n + 1 \end{pmatrix}.}$$

4. En particulier, pour $n = 5$, on a

$$A^5 = \begin{pmatrix} 1 + 10 - 25 & 25 & 10 - 25 \\ -5 & 6 & -5 \\ 25 - 15 & 5 - 25 & 25 - 15 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & 25 & -15 \\ -5 & 6 & -5 \\ 10 & -20 & 11 \end{pmatrix}.$$

Conclusion,

$$\boxed{A^5 = \begin{pmatrix} -14 & 25 & -15 \\ -5 & 6 & -5 \\ 10 & -20 & 11 \end{pmatrix}.}$$

## Partie 3 : Méthode 2, par la division euclidienne

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on admet l'existence de trois réels $(a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{R}^3$ et d'un polynôme $Q_n$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad x^n = (x-1)^3 Q_n(x) + a_n x^2 + b_n x + c_n.$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Les fonctions $x \mapsto x^n$ $(x-1)^3$, $x \mapsto Q_n(x)$ et $x \mapsto ax^2 + bx + c$ sont deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ en tant que fonctions polynomiales et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad nx^{n-1} = 3(x-1)^2 Q_n(x) + (x-1)^3 Q_n'(x) + 2a_n x + b_n.$$

En dérivant une seconde fois, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} n(n-1) x^{n-2} &= 6(x-1) Q_n(x) + 3(x-1)^2 Q_n'(x) + 3(x-1) Q_n'(x) + (x-1)^3 Q_n''(x) + 2a_n \\ &= 6(x-1) Q_n(x) + 6(x-1)^2 Q_n'(x) + (x-1)^3 Q_n''(x) + 2a_n. \end{aligned}$$

Conclusion, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{\begin{aligned} nx^{n-1} &= 3(x-1)^2 Q_n(x) + (x-1)^3 Q_n'(x) + 2a_n x + b_n \\ n(n-1) x^{n-2} &= 6(x-1) Q_n(x) + 6(x-1)^2 Q_n'(x) + (x-1)^3 Q_n''(x) + 2a_n. \end{aligned}}$$

6. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Par la question précédente, en prenant $x = 1$, dans les deux égalités on a

$$\begin{cases} n = 2a_n + b_n \\ n\,(n-1) = 2a_n \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} n = 2a_n + b_n \\ a_n = \frac{n(n-1)}{2} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} b_n = n - 2a_n = n - n\,(n-1) = -n\,(n-2) \\ a_n = \frac{n(n-1)}{2}. \end{cases}$$

Et puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^n = (x-1)^3\, Q_n(x) + a_n x^2 + b_n x + c_n$, en prenant $x = 1$ encore une fois, on obtient

$$\begin{aligned} & 1 = a_n + b_n + c_n = \frac{n\,(n-1)}{2} - n\,(n-2) + c_n \\ \Leftrightarrow \quad & c_n = n\,(n-2) - \frac{n\,(n-1)}{2} + 1 \\ & = \frac{2n^2 - 4n - n^2 + n + 2}{2} = \frac{n^2 - 3n + 2}{2} = \frac{(n-1)\,(n-2)}{2}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \geqslant 2, \qquad a_n = \frac{n\,(n-1)}{2},\ b_n = -n\,(n-2)\,,\ c_n = \frac{(n-1)\,(n-2)}{2}.}$$

7. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Par la relation $x^n = (x-1)^3\, Q_n(x) + a_n x^2 + b_n x + c_n$, on en déduit que

$$A^n = (A - I_3)^3\, Q_n\,(A) + a_n A^2 + b_n A + c_n I_3 = \underbrace{N^3}_{=0_3} Q_n\,(A) + a_n A^2 + b_n A + c_n I_3 = a_n A^2 + b_n A + c_n I_3.$$

Conclusion, par la question précédente,

$$\boxed{A^n = \frac{n\,(n-1)}{2} A^2 - n\,(n-2)\,A + \frac{(n-1)\,(n-2)}{2} I_3.}$$

8. En particulier, pour $n = 5$,
$$A^5 = 10A^2 - 15A + 6I_3.$$

Or
$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,
$$A^5 = 10 \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} - 15 \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} + 6 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & 25 & -15 \\ -5 & 6 & -5 \\ 10 & -20 & 11 \end{pmatrix}.$$

Conclusion, on retrouve bien le résultat de la question 4.

$$\boxed{A^5 = \begin{pmatrix} -14 & 25 & -15 \\ -5 & 6 & -5 \\ 10 & -20 & 11 \end{pmatrix}.}$$

**Partie 4 : Racines carrées de $T$**

On pose $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $M = T - I_3$. On s'intéresse à déterminer l'ensemble des racines carrées de $T$ :

$$\mathscr{R}_T = \left\{ S \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \;\middle|\; S^2 = T \right\}.$$

Pour ce faire, on pose également $\mathscr{C}_T$ l'ensemble des matrices commutant avec $T$ :

$$\mathscr{C}_T = \{ S \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid TS = ST \}.$$

On admet le résultat suivant

$$\mathscr{C}_T = \left\{ aI_3 + bM + cM^2 \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \;\middle|\; (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

9. Soit $S \in \mathscr{R}_T$. Alors, par définition, $S^2 = T$. Par suite,

$$TS = S^2 S = S^3 = S S^2 = ST.$$

Donc $S \in \mathscr{C}_T$. Ceci étant vrai pour $S \in \mathscr{R}_T$ quelconque, on en déduit que

$$\boxed{\mathscr{R}_T \subseteq \mathscr{C}_T.}$$

10. Soit $S \in \mathscr{R}_T$. Alors par la question précédente, on a $S \in \mathscr{C}_T$. Donc d'après l'énoncé,

$$\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, \qquad S = aI_3 + bM + cM^2.$$

Donc

$$\begin{aligned} T = S^2 &= \left(aI_3 + bM + cM^2\right)\left(aI_3 + bM + cM^2\right) \\ &= a^2 I_3 + abM + acM^2 + abM + b^2M^2 + bcM^3 + acM^2 + bcM^3 + c^2M^4 \\ &= a^2 I_3 + 2abM + \left(b^2 + 2ac\right)M^2 + 2bcM^3 + c^2M^4. \end{aligned}$$

Or

$$M = T - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Puis,

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3$$

et donc $M^4 = 0_3$. On obtient alors que

$$
\begin{aligned}
& T = a^2 I_3 + 2abM + \left(b^2+2ac\right) M^2 + 2bcM^3 + c^2M^4 \\
\Leftrightarrow \quad & T = a^2\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} + 2ab\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix} + \left(b^2+2ac\right)\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a^2&2ab&b^2+2ac\\0&a^2&2ab\\0&0&a^2\end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{cases} a^2 = 1 \\ 2ab = 1 \\ b^2+2ac = 0 \end{cases} \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{cases} a = 1 \\ b = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4}+2c = 0 \Leftrightarrow c = -\frac{1}{8} \end{cases} \quad \text{OU} \quad \begin{cases} a = -1 \\ b = -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4}-2c = 0 \Leftrightarrow c = \frac{1}{8} \end{cases} \\
\Leftrightarrow \quad & S = aI_3 + bM + cM^2 = \underbrace{\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{8}\\0&1&\frac{1}{2}\\0&0&1\end{pmatrix}}_{=S_0} \quad \text{OU} \quad S = \begin{pmatrix}-1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{8}\\0&-1&-\frac{1}{2}\\0&0&-1\end{pmatrix} = -S_0.
\end{aligned}
$$

Ainsi,

$$\mathscr{R}_T \subseteq \left\{ \begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{8}\\0&1&\frac{1}{2}\\0&0&1\end{pmatrix} \; ; \; \begin{pmatrix}-1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{8}\\0&-1&-\frac{1}{2}\\0&0&-1\end{pmatrix} \right\}.$$

Réciproquement, si $S = S_0 = \begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{8}\\0&1&\frac{1}{2}\\0&0&1\end{pmatrix}$, alors

$$S_0^2 = \begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{8}\\0&1&\frac{1}{2}\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{8}\\0&1&\frac{1}{2}\\0&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix} = T$$

De même, si $S = -S_0$, alors $S^2 = (-S_0)(-S_0) = S_0^2 = T$. Donc $\{S_0 \; ; \; -S_0\} \subseteq \mathscr{R}_T$. Conclusion, $\mathscr{R}_T$ possède bien exactement deux éléments :

$$\boxed{\mathscr{R}_T = \left\{ \begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{8}\\0&1&\frac{1}{2}\\0&0&1\end{pmatrix} \; ; \; \begin{pmatrix}-1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{8}\\0&-1&-\frac{1}{2}\\0&0&-1\end{pmatrix} \right\}.}$$

## Partie 5 : Racines carrées de $A$

On pose $P = \begin{pmatrix}1&1/2&-1\\0&1/2&1/2\\-1&0&1\end{pmatrix}$

11. On applique l'algorithme de Gauss-Jordan :

$$\begin{array}{lcr}
P=\begin{pmatrix}1&1/2&-1\\0&1/2&1/2\\-1&0&1\end{pmatrix} & & I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\\
\underset{\mathscr{L}}{\sim}\begin{pmatrix}1&1/2&-1\\0&1/2&1/2\\0&1/2&0\end{pmatrix} & L_3\leftarrow L_3+L_1 & \underset{\mathscr{L}}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\\
\underset{\mathscr{L}}{\sim}\begin{pmatrix}1&1/2&-1\\0&1/2&0\\0&1/2&1/2\end{pmatrix} & L_3\leftrightarrow L_2 & \underset{\mathscr{L}}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\\
\underset{\mathscr{L}}{\sim}\begin{pmatrix}1&1/2&-1\\0&1/2&0\\0&0&1/2\end{pmatrix} & L_3\leftarrow L_3-L_2 & \underset{\mathscr{L}}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&1\\-1&1&-1\end{pmatrix}\\
\underset{\mathscr{L}}{\sim}\begin{pmatrix}1&1/2&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} & \begin{array}{l}L_2\leftarrow 2L_2\\L_3\leftarrow 2L_3\end{array} & \underset{\mathscr{L}}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0\\2&0&2\\-2&2&-2\end{pmatrix}\\
\underset{\mathscr{L}}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} & L_1\leftarrow L_1-\frac{1}{2}L_2+L_3 & \underset{\mathscr{L}}{\sim}\begin{pmatrix}-2&2&-3\\2&0&2\\-2&2&-2\end{pmatrix}.
\end{array}$$

On obtient donc que $P\underset{\mathscr{L}}{\sim} I_3$, donc

$$\boxed{\text{la matrice } P \text{ est inversible et } P^{-1}=\begin{pmatrix}-2&2&-3\\2&0&2\\-2&2&-2\end{pmatrix}.}$$

*On n'a pas oublié naturellement de vérifier son résultat :*

$$PP^{-1}=\begin{pmatrix}1&1/2&-1\\0&1/2&1/2\\-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&2&-3\\2&0&2\\-2&2&-2\end{pmatrix}=I_3.$$

12. A l'aide de la question précédente, on a

$$\begin{aligned}
P^{-1}AP&=P^{-1}\begin{pmatrix}2&1&1\\-1&2&-1\\-2&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1/2&-1\\0&1/2&1/2\\-1&0&1\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}-2&2&-3\\2&0&2\\-2&2&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3/2&-1/2\\0&1/2&1\\-1&-1&1\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{P^{-1}AP=T.}$$

On considère

$$\mathscr{R}_A=\left\{\,B\in\mathscr{M}_3(\mathbb{R})\;\middle|\;B^2=A\,\right\}.$$

13. Soit $B \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Posons $S = P^{-1}BP$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
B \in \mathscr{R}_A \quad &\Leftrightarrow \quad B^2 = A \quad \Leftrightarrow \quad P^{-1}B^2P = P^{-1}AP \\
&\Leftrightarrow \quad P^{-1}BPP^{-1}BP = T \qquad \text{d'après la question précédente} \\
&\Leftrightarrow \quad S^2 = T \\
&\Leftrightarrow \quad S \in \mathscr{R}_T.
\end{aligned}$$

14. Avec les notations de la questions précédentes, pour $B \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$

$$B \in \mathscr{R}_A \quad \Leftrightarrow \quad S \in \mathscr{R}_T.$$

Donc par la question 10., en posant $S_0 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$$\begin{aligned}
B \in \mathscr{R}_A \quad &\Leftrightarrow \quad S = S_0 \quad \text{OU} \quad S = -S_0 \\
&\Leftrightarrow \quad P^{-1}BP = S_0 \quad \text{OU} \quad P^{-1}BP = -S_0 \\
&\Leftrightarrow \quad B = PS_0P^{-1} \quad \text{OU} \quad B = -PS_0P^{-1}.
\end{aligned}$$

Calculons,

$$\begin{aligned}
PS_0P^{-1} &= P \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3/4 & 7/4 & -7/4 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 7/4 & 1/4 & 3/4 \\ -1/2 & 3/2 & -1/2 \\ -5/4 & 1/4 & -1/4 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{R}_A = \left\{ \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 7 & 1 & 3 \\ -2 & 6 & -2 \\ -5 & 1 & -1 \end{pmatrix} ; \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -7 & -1 & -3 \\ 2 & -6 & 2 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}}.$$

*Il est possible de contrôler son résultat en vérifiant que $S_0^2 = A$.*

# Problème II - Analyse Asymptotique

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la FONCTION ITÉRÉE $n^{\text{IÈME}}$ de l' arctangente, que l'on note $\arctan^{[n]}$, par :

$$\arctan^{[n]} = \underbrace{\arctan \circ \arctan \circ \cdots \circ \arctan}_{n \text{ fois}}$$

où $\circ$ désigne la composition entre fonctions.

## Partie 1 : L'itérée première

Soit $p \in \mathbb{N}$.

1. On sait que

$$\frac{1}{1+u} \underset{u \to 0}{=} \sum_{k=0}^{p} (-1)^k u^k + o(u^p).$$

Donc en posant $u = x^2 \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$, on obtient que

$$\boxed{\frac{1}{1+x^2} \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{p} (-1)^k x^{2k} + o\left(x^{2p}\right).}$$

2. La fonction arctan est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$, qui d'après la question précédente admet un développement limité à l'ordre $2p$. Donc par le théorème de primitivation des développements limités, on a

$$\arctan(x) \underset{x \to 0}{=} \arctan(0) + \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o\left(x^{2p+1}\right).$$

Or $\arctan(0) = 0$. Conclusion, on retrouve la formule bien connue du cours,

$$\boxed{\arctan(x) \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{p} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} + o\left(x^{2p+1}\right).}$$

3. A l'ordre 5, on a $\arctan(u) \underset{u \to 0}{=} u - \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + o\left(u^5\right)$. Donc en posant $u = 2x \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$,

$$\arctan(2x) \underset{x \to 0}{=} 2x - \frac{8x^3}{3} + o\left(x^3\right).$$

Dès lors,

$$\frac{1}{\arctan(2x)} \underset{x \to 0}{=} \frac{1}{2x - \frac{8x^3}{3} + o(x^3)} \underset{x \to 0}{=} \frac{1}{2x} \frac{1}{1 - \frac{4x^2}{3} + o(x^2)}.$$

Posons $u(x) \underset{x \to 0}{=} -\frac{4x^2}{3} + o\left(x^2\right)$. Alors

- $u(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$
- Et

$$o(u(x)) \underset{x \to 0}{=} o\left(x^2\right).$$

Or $\frac{1}{1+u} \underset{u \to 0}{=} 1 - u + o(u)$. Donc

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\arctan(2x)} &\underset{x \to 0}{=} \frac{1}{2x}\left(1 - u(x) + o(u(x))\right) \\
&\underset{x \to 0}{=} \frac{1}{2x}\left(1 + \frac{4x^2}{3} + o\left(x^2\right) + o\left(x^2\right)\right) \\
&\underset{x \to 0}{=} \frac{1}{2x} + \frac{2x}{3} + o(x).
\end{aligned}$$

De la même façon, on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{\operatorname{sh}(2x)} &\underset{x\to0}{=} \frac{1}{2x+\frac{8x^3}{6}+o\left(x^3\right)}\\ &\underset{x\to0}{=} \frac{1}{2x}\frac{1}{1+\frac{2x^2}{3}+o\left(x^2\right)}\\ &\underset{x\to0}{=} \frac{1}{2x}\left(1-\frac{2x^2}{3}+o\left(x^2\right)+o\left(x^2\right)\right)\\ &\underset{x\to0}{=} \frac{1}{2x}-\frac{x}{3}+o(x).\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\frac{1}{\operatorname{sh}(2x)}-\frac{1}{\arctan(2x)} \underset{x\to0}{=} \frac{1}{2x}-\frac{x}{3}+o(x)-\frac{1}{2x}-\frac{2x}{3}+o(x) \underset{x\to0}{=} -x+o(x).$$

Conclusion,

$$\boxed{\frac{1}{\operatorname{sh}(2x)}-\frac{1}{\arctan(2x)} \underset{x\to0}{\sim} -x.}$$

4. On considère la fonction

$$f : x \mapsto x^{3/2}\sqrt{\frac{\pi}{2}-\arctan(x+1)}.$$

Pour tout $u>0$, on sait que $\arctan(u)+\arctan\left(\frac{1}{u}\right)=\frac{\pi}{2}$. Donc pour tout $x>0$,

$$f(x)=x^{3/2}\sqrt{\arctan\left(\frac{1}{x+1}\right)}=x^{3/2}\sqrt{\arctan\left(\frac{1}{x}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right)}.$$

Or $\frac{1}{1+u} \underset{u\to0}{=} 1-u+u^2+o\left(u^2\right)$. Posons $u(x)=\frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Alors,

$$\frac{1}{1+\frac{1}{x}} \underset{x\to+\infty}{=} 1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Alors

$$\arctan\left(\frac{1}{x}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right) \underset{x\to+\infty}{=} \arctan\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right).$$

Posons $u(x) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)$. Alors,

- $u(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
- Comme $u(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$, alors $u(x)^3 \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^3}$ i.e.

$$u(x)^3 \underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

- Enfin,

$$o\left(u(x)^3\right) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

Or $\arctan(u) \underset{u\to0}{=} u-\frac{u^3}{3}+o\left(u^3\right)$. Donc

$$\begin{aligned}\arctan\left(\frac{1}{x}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right) &\underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)-\frac{1}{3x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\\ &\underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right).\end{aligned}$$

Dès lors,

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x\to+\infty}{=} x^{3/2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)^{1/2} \\ &\underset{x\to+\infty}{=} x\left(1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)^{1/2} \end{aligned}$$

Posons $v(x) \underset{x\to+\infty}{=} -\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Alors,

- $v(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
- De plus, comme $v(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{x}$, alors $u(x)^2 \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$ i.e.

$$u(x)^2 \underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

- Enfin,

$$o\left(u(x)^2\right) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Or

$$(1+v)^{1/2} \underset{v\to0}{=} 1+\frac{v}{2}+\frac{(1/2)(-1/2)}{2}v^2+o\left(v^2\right) \underset{v\to0}{=} 1+\frac{v}{2}-\frac{v^2}{8}+o\left(v^2\right).$$

D'où

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x\to+\infty}{=} x\left(1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)^{1/2} \\ &\underset{x\to+\infty}{=} x\left(1-\frac{1}{2x}+\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)-\frac{1}{8x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &\underset{x\to+\infty}{=} x\left(1-\frac{1}{2x}+\frac{7}{8x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &\underset{x\to+\infty}{=} x-\frac{1}{2}+\frac{7}{8x}+o\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ admet une asymptote d'équation } y = x-\frac{1}{2}.}$$

De plus $f(x)-\left(x-\frac{1}{2}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{7}{8x}$. Or pour tout $x>0$, $\frac{7}{8x}>0$ et deux équivalents ont même signe au voisinage considéré. Donc

$$\boxed{\text{la courbe représentative de } f \text{ est au-dessus de son asymptote au voisinage de } +\infty.}$$

### Partie 2 : L'itérée deuxième

5. On sait que $\arctan(x) \underset{x\to0}{=} x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+o\left(x^5\right)$. Posons $u(x) \underset{x\to0}{=} \arctan(x)$. Alors, on a

- $u(x) \underset{x\to0}{\longrightarrow} 0$.
- De plus,

$$\begin{aligned} u(x)^2 &\underset{x\to0}{=} \left(x-\tfrac{x^3}{3}+\tfrac{x^5}{5}+o\left(x^5\right)\right)\left(x-\tfrac{x^3}{3}+\tfrac{x^5}{5}+o\left(x^5\right)\right) \\ &\underset{x\to0}{=} x^2 \quad -\tfrac{x^4}{3} \quad +o\left(x^5\right) \\ &\qquad\quad\;\; -\tfrac{x^4}{3} \quad +o\left(x^5\right) \\ &\qquad\qquad\qquad\;\; +o\left(x^5\right) \\ &\underset{x\to0}{=} x^2-\tfrac{2x^4}{3}+o\left(x^5\right) \end{aligned}$$

- Puis,

$$\begin{aligned}
u(x)^3 &\underset{x\to 0}{=} \left(x - \tfrac{x^3}{3} + \tfrac{x^5}{5} + o\left(x^5\right)\right)\left(x^2 - \tfrac{2x^4}{3} + o\left(x^5\right)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} x^3 \quad -\tfrac{2x^5}{3} \quad +o\left(x^5\right) \\
&\qquad\quad -\tfrac{x^5}{3} \quad +o\left(x^5\right) \\
&\qquad\qquad\qquad +o\left(x^5\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} x^3 - x^5 + o\left(x^5\right)
\end{aligned}$$

- Comme $u(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, on en déduit que $u(x)^5 \underset{x\to 0}{\sim} x^5$ et donc

$$u(x)^5 \underset{x\to 0}{=} x^5 + o\left(x^5\right).$$

- Enfin,

$$o\left(u(x)^5\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^5\right).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\arctan^{[2]}(x) &\underset{x\to 0}{=} u(x) - \tfrac{u(x)}{3} + \tfrac{u(x)^5}{5} + o\left(u(x)^5\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} x \quad -\tfrac{x^3}{3} \quad +\tfrac{x^5}{5} \quad +o\left(x^5\right) \\
&\qquad\quad -\tfrac{x^3}{3} \quad +\tfrac{x^5}{3} \quad +o\left(x^5\right) \\
&\qquad\qquad\qquad +\tfrac{x^5}{5} \quad +o\left(x^5\right) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad +o\left(x^5\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} x - \tfrac{2x^3}{3} + \tfrac{(3+5+3)x^5}{15} + o\left(x^5\right)
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\arctan^{[2]}(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{2x^3}{3} + \frac{11x^5}{15} + o\left(x^5\right).}$$

6. Pour tout $x \neq 0$, $\arctan(x) > 0$ et donc $\arctan^{[2]}(x) = \arctan\left(\arctan(x)\right) > 0$. Ainsi, pour $x > 0$, $\frac{\arctan^{[2]}(x)}{x} > 0$. De même, pour $x < 0$, on a $\arctan^{[2]}(x) < 0$ et donc $\frac{\arctan^{[2]}(x)}{x} > 0$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$g(x) = \mathrm{e}^{\frac{\cos(x)}{x}\ln\left(\frac{\arctan^{[2]}(x)}{x}\right)}.$$

Par la question précédente,

$$\ln\left(\frac{\arctan^{[2]}(x)}{x}\right) \underset{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}{=} \ln\left(\frac{x - \frac{2x^3}{3} + \frac{11x^5}{15} + o\left(x^5\right)}{x}\right) \underset{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}{=} \ln\left(1 - \frac{2x^2}{3} + o\left(x^3\right)\right).$$

Posons $u(x) \underset{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}{=} -\frac{2x^2}{3} + o\left(x^3\right)$. Alors

- $u(x) \underset{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}{\longrightarrow} 0$.
- De plus,

$$u(x)^2 \underset{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}{=} o\left(x^3\right).$$

- A fortiori, $o\left(u(x)^2\right) \underset{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}{=} o\left(x^3\right)$.

Or $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{=} u - \frac{u^2}{2} + o\left(u^2\right)$. Dès lors,

$$\ln\left(\frac{\arctan^{[2]}(x)}{x}\right) \underset{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}{=} -\frac{2x^2}{3} + o\left(x^3\right) + o\left(x^3\right) + o\left(x^3\right) \underset{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}{=} -\frac{2x^2}{3} + o\left(x^3\right).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\frac{\cos(x)}{x}\ln\left(\frac{\arctan^{[2]}(x)}{x}\right) &\underset{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}{=} \frac{1}{x}\left(1-\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)\right)\left(-\frac{2x^2}{3}+o\left(x^3\right)\right)\\ &\underset{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}{=} \left(1-\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)\right)\left(-\frac{2x}{3}+o\left(x^2\right)\right)\\ &\underset{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}{=} -\frac{2x}{3}+o\left(x^2\right).\end{aligned}$$

Posons $v(x) \underset{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}{=} -\frac{2x}{3} + o\left(x^2\right)$. Alors,

- $v(x) \underset{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}{\longrightarrow} 0$.
- De plus, puisque $v(x) \underset{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}{\sim} -\frac{2x}{3}$ et donc $v(x)^2 \underset{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}{\sim} \frac{4x^2}{9}$ et donc
$$v(x)^2 \underset{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}{=} \frac{4x^2}{9} + o\left(x^2\right).$$
- Enfin,
$$o\left(v(x)^2\right) \underset{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}{=} o\left(x^2\right).$$

Or $\mathrm{e}^v \underset{v\to 0}{=} 1 + v + \frac{v^2}{2} + o\left(v^2\right)$. D'où,

$$\begin{aligned}g(x) &\underset{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}{=} 1 + v(x) + \frac{v^2(x)}{2} + o\left(v^2(x)\right)\\ &\underset{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}{=} 1 - \frac{2x}{3} + o\left(x^2\right) + \frac{2x^2}{9} + o\left(x^2\right) + o\left(x^2\right)\\ &\underset{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}{=} 1 - \frac{2x}{3} + \frac{2x^2}{9} + o\left(x^2\right).\end{aligned}$$

On remarque alors que $g(x) \underset{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}{\sim} 1$ i.e.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} g(x) = 1.$$

Donc

$$\boxed{\text{la fonction } g \text{ est prolongeable par continuité en 0 en posant } g(0)=1.}$$

On note $\tilde{g}$ son prolongement. On a

$$\tilde{g}(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{2x}{3} + \frac{2x^2}{9} + o\left(x^2\right).$$

Donc $\tilde{g}$ admet développement limité à l'ordre 1 en 0 donc

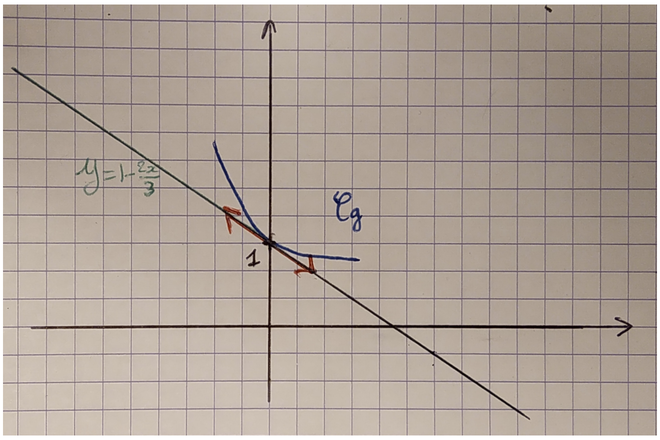
$$\boxed{\tilde{g} \text{ est dérivable en 0 et admet pour tangente en 0 la droite d'équation } y = 1 - \frac{2x}{3}.}$$

Enfin,

$$\tilde{g}(x) - \left(1 - \frac{2x}{3}\right) \underset{x \to 0}{\sim} \frac{2x^2}{9} \geqslant 0.$$

Or deux équivalents ont même signe au voisinage considéré donc

$$\boxed{\text{la courbe de } \tilde{g} \text{ est au-dessus de sa tangente au voisinage de 0.}}$$




## Partie 3 : L'itérée $n$-ième

7. Procédons par récurrence. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(n)$ : « $\arctan^{[n]}$ est définie sur $\mathbb{R}$ et impaire. »
   *Initialisation.* Si $n = 1$, alors $\arctan^{[1]} = \arctan$ est bien définie sur $\mathbb{R}$ et impaire.
   *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ i.e. $\arctan^{[n]}$ est définie sur $\mathbb{R}$ et impaire. Alors, $\arctan^{[n+1]} = \arctan \circ \arctan{[n]}$ est bien définie sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$.
   L'ensemble $\mathbb{R}$ est bien centré en 0 et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\arctan^{[n+1]}(-x) &= \arctan^{[n]} \circ \arctan(-x) \\
&= \arctan^{[n]}(\arctan(-x)) \\
&= \arctan^{[n]}(-\arctan(x)) && \text{car arctan est impaire} \\
&= -\arctan^{[n]}(\arctan(x)) && \text{car par hypothèse de récurrence, } \arctan^{[n]} \text{ est impaire} \\
&= -\arctan^{[n+1]}(x).
\end{aligned}$$

   Donc $\arctan^{[n+1]}$ est impaire et $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
   *Conclusion,*

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \arctan^{[n]} \text{ est bien définie sur } \mathbb{R} \text{ et impaire.}}$$

8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}$. En tant que composée de fonctions $\mathscr{C}^k$ sur $\mathbb{R}$ la fonction $\arctan^{[n]}$ est $\mathscr{C}^k$ sur $\mathbb{R}$. Donc par le théorème de Taylor-Young,

$$\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N}, \arctan^{[n]} \text{ admet un développement limité à l'ordre } k \text{ en 0.}}$$

   De plus, d'après la question précédente, $\arctan^{[n]}$ est impaire et nous regardons le développement en 0 *(important !)* donc

$$\boxed{\text{le développement limité de } \arctan^{[n]} \text{ en 0 n'admet que des puissances impaires.}}$$

Autrement dit

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ \exists\,(a_1, a_3, \dots, a_{2p+1}) \in \mathbb{R}^p, \qquad \arctan^{[n]}(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{p} a_{2k+1} x^{2k+1} + o\left(x^{2p+1}\right).}$$

On admet dans la suite qu'il existe trois suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\arctan^{[n]}(x) \underset{x\to 0}{=} a_n x + b_n x^3 + c_n x^5 + o\left(x^5\right).$$

9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $u(x) = \arctan(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o\left(x^5\right)$. Alors, par la question 5. on a

$$\begin{aligned} u(x) &\underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0 \\ u(x)^3 &\underset{x\to 0}{=} x^3 - x^5 + o\left(x^5\right) \\ u(x)^5 &\underset{x\to 0}{=} x^5 + o\left(x^5\right) \\ o\left(u(x)^5\right) &\underset{x\to 0}{=} o\left(x^5\right). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \arctan^{[n+1]}(x) &= \arctan^{[n]}\left(u(x)\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} a_n u(x) + b_n u(x)^3 + c_n u(x)^5 + o\left(u(x)\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} \begin{array}{llll} a_n x & -\frac{a_n}{3}x^3 & +\frac{a_n}{5}x^5 & +o\left(x^5\right) \\ & +b_n x^3 & -b_n x^5 & +o\left(x^5\right) \\ & & +c_n x^5 & +o\left(x^5\right) \\ & & & +o\left(x^5\right) \end{array} \\ &\underset{x\to 0}{=} a_n x + \left(b_n - \frac{a_n}{3}\right) x^3 + \left(\frac{a_n}{5} - b_n + c_n\right) x^5 + o\left(x^5\right). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \arctan^{[n+1]}(x) \underset{x\to 0}{=} a_n x + \left(b_n - \frac{a_n}{3}\right) x^3 + \left(\frac{a_n}{5} - b_n + c_n\right) x^5 + o\left(x^5\right).}$$

10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On sait que $\arctan^{[n+1]} \underset{x\to 0}{=} a_{n+1}x + b_{n+1}x^3 + c_{n+1}x^5 + o\left(x^5\right)$. Donc par la question précédente,

$$a_{n+1}x + b_{n+1}x^3 + c_{n+1}x^5 + o\left(x^5\right) \underset{x\to 0}{=} a_n x + \left(b_n - \frac{a_n}{3}\right) x^3 + \left(\frac{a_n}{5} - b_n + c_n\right) x^5 + o\left(x^5\right).$$

Conclusion, par unicité du développement limité,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \begin{cases} a_{n+1} = a_n \\ b_{n+1} = b_n - \frac{a_n}{3} \\ c_{n+1} = \frac{a_n}{5} - b_n + c_n. \end{cases}}$$

11. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} = a_n$. Donc $\boxed{(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est une suite constante}}$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = a_1$. Or $\arctan(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o\left(x^5\right)$. Donc

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ b_1 = -\frac{1}{3} \\ c_1 = \frac{1}{5}. \end{cases}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad a_n = 1.}$$

12. A l'aide des deux questions précédentes, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$b_{n+1} = b_n - \frac{a_n}{3} = b_n - \frac{1}{3}.$$

Donc $\boxed{(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est une suite arithmétique de raison } r = -\frac{1}{3}}$. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad b_n = b_1 - \frac{n-1}{3} = -\frac{1}{3} - \frac{n-1}{3} = -\frac{n}{3}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad b_n = -\frac{n}{3}.}$$

13. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. On considère la somme suivante :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} (c_{k+1} - c_k),$$

On reconnaît une somme télescopique donc

$$\boxed{S_n = c_n - c_1 = c_n - \frac{1}{5}.}$$

D'autre part, par la question 10. on a

$$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{a_k}{5} - b_k + c_k - c_k\right) = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{5} + \frac{k}{3}\right) = \frac{n-1}{5} + \frac{1}{3}\frac{(n-1)\,n}{2} = \frac{n-1}{30}(6+5n).$$

Ainsi,

$$\boxed{S_n = \frac{(5n+6)(n-1)}{30}.}$$

14. Par la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$c_n = \frac{1}{5} + S_n = \frac{1}{5} + \frac{(5n+6)(n-1)}{30} = \frac{6 + 5n^2 - 5n + 6n - 6}{30} = \frac{5n^2+n}{30} = \frac{n(5n+1)}{30}.$$

Donc à l'aide des questions précédentes, on conclut que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \arctan^{[n]}(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{n}{3}x^3 + \frac{n(5n+1)}{30}x^5 + o\left(x^5\right).}$$

15. Si $n = 1$, on retrouve bien

$$\arctan(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{1\times 6}{30}x^5 + o\left(x^5\right) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o\left(x^5\right).$$

Si $n = 2$, on retrouve le résultat de la question 5.

$$\arctan^{[2]}(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{2x^3}{3} + \frac{2\times 11}{30}x^5 + o\left(x^5\right) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{2x^3}{3} + \frac{11x^5}{15} + o\left(x^5\right).$$

Conclusion, $\boxed{\text{les résultats sont cohérents.}}$

# Exercice III - Ensembles et Applications

Soient $E$ et $F$ deux ensembles, $f \in \mathscr{F}(E,F)$. On pose alors

$$\varphi : \begin{array}{rcl} \mathscr{P}(E) & \to & \mathscr{P}(F) \\ A & \mapsto & f(A). \end{array}$$

1. On suppose $f$ injective. Montrons que $\varphi$ est injective. Soit $(A,B) \in \mathscr{P}(E)^2$ tel que $\varphi(A) = \varphi(B)$ i.e.

$$f(A) = f(B).$$

Montrons que $A = B$. Soit $x \in A$. Alors, $f(x) \in f(A) = f(B)$. Donc $f(x) \in f(B)$. Donc il existe $y \in B$ tel que $f(x) = f(y)$ *(attention, a priori $y$ n'est pas $x$)*. Or la fonction $f$ est injective donc $x = y \in B$. Donc si $x \in A$ alors $x \in B$. Ainsi,

$$A \subseteq B.$$

Or par symétrie des hypothèses sur $A$ et $B$, on démontre de même que $B \subseteq A$. Donc $A = B$. Donc $\varphi$ est bien injective. Conclusion,

$$\boxed{f \text{ injective } \Rightarrow \varphi \text{ injective.}}$$

2. Montrons que $\varphi$ injective $\Rightarrow$ $f$ injective. Supposons $\varphi$ injective. Montrons que $f$ est injective. Soit $(x,y) \in E^2$ tel que $f(x) = f(y)$. Posons $X = \{x\}$ et $Y = \{y\}$. Alors,

$$\varphi(X) = f(\{x\}).$$

Par définition de l'ensemble image, $f(\{x\})$ est l'ensemble de toutes les images possibles lorsque la variable varie dans $\{x\}$ i.e. est égale à $x$ et donc seule $f(x)$ est possible comme image. Donc

$$\varphi(X) = f(\{x\}) = \{f(x)\}.$$

De même

$$\varphi(Y) = f(\{y\}) = \{f(y)\}.$$

Or $f(x) = f(y)$ donc $\{f(x)\} = \{f(y)\}$. Ainsi,

$$\varphi(X) = \varphi(Y).$$

Or $\varphi$ est injective. Donc $X = Y$ i.e. $\{x\} = \{y\}$. Donc $x = y$. Donc $f$ est bien injective. Conclusion,

$$\boxed{\varphi \text{ injective } \Rightarrow f \text{ injective.}}$$

3. Soit $B \in \mathscr{P}(F)$. On pose $A = f^{-1}(B)$.

   (a) Montrons que $f(A) \subseteq B$. Soit $y \in f(A)$. Alors il existe $x \in A$ tel que $f(x) = y$. Or $A = f^{-1}(B)$. Donc $x \in f^{-1}(B)$ i.e. $f(x) \in B$. Donc $y = f(x) \in B$. Ceci étant vrai pour $y$ quelconque dans $f(A)$. On conclut que

   $$\boxed{f(A) \subseteq B.}$$

   (b) On suppose dans cette question que $f$ est surjective. Montrons que $f(A) = B$. On sait déjà que $f(A) \subseteq B$ donc montrons que $B \subseteq f(A)$. Soit $y \in B \subseteq F$. Or $f$ est surjective donc il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Donc $f(x) \in B$ donc $x \in f^{-1}(B) = A$. Donc on a $y = f(x)$ et $x \in A$. Donc $y \in f(A)$. Ceci étant vrai pour $y$ quelconque dans $B$, on en déduit que

   $$B \subseteq f(A).$$

   Conclusion, à l'aide de la question précédente,

   $$\boxed{f(A) = B.}$$

4. Supposons $f$ surjective. Montrons que $\varphi$ est surjective. Soit $B \in \mathscr{P}(F)$. Posons $A = f^{-1}(B)$. Alors, puisque $f$ est surjective, par la question précédente, $B = f(A) = \varphi(A)$. Donc $B$ admet bien un antécédent par $\varphi$. Ceci étant vrai pour $B$ quelconque dans $\mathscr{P}(F)$. On en déduit que $\varphi$ est surjective. D'où
$$f \text{ surjective } \Rightarrow \varphi \text{ surjective.}$$
Réciproquement, supposons $\varphi$ surjective. Montrons que $f$ est surjective. Soit $y \in F$. Montrons que $y$ possède un antécédent par $f$. Posons $Y = \{y\} \in \mathscr{P}(F)$. Or $\varphi$ est surjective, donc il existe $X \in \mathscr{P}(E)$ tel que $\varphi(X) = Y$ i.e. $f(X) = Y$. Supposons $X = \emptyset$. Alors $Y = f(\emptyset) = \emptyset$. Contradiction (car $y \in Y$). Donc $X \neq \emptyset$. Soit $x \in X$. Alors $f(x) \in f(X) = Y$. Donc $f(x) \in \{y\}$. Nécessairement, $f(x) = y$. Donc $y$ a bien un antécédent par $f$. Ceci étant vrai pour $y \in F$ quelconque, on en déduit que
$$\varphi \text{ surjective } \Rightarrow f \text{ surjective.}$$
Conclusion,
$$\boxed{f \text{ surjective } \Leftrightarrow \varphi \text{ surjective.}}$$

5. Par les questions 1. et 2., on a
$$f \text{ injective } \Leftrightarrow \varphi \text{ injective.}$$
Or par la question précédente, on a aussi $f$ surjective $\Leftrightarrow$ $\varphi$ surjective. D'où
$$f \text{ bjective } \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ injective} \\ f \text{ surjective} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi \text{ injective} \\ \varphi \text{ surjective} \end{cases} \quad \varphi \text{ bijective.}$$
Conclusion,
$$f \text{ bijective } \Leftrightarrow \varphi \text{ bijective.}$$
Dans ce cas, on peut montrer que
$$\boxed{\varphi^{-1} : \begin{array}{rcl} \mathscr{P}(F) & \to & \mathscr{P}(E) \\ B & \mapsto & f^{-1}(B)\,. \end{array}}$$

# Problème IV - Continuité - Dérivabilité

## Partie 1 : Un résultat de convexité

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$ et $g : [a; b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a; b]$ et deux fois dérivable sur $]a; b[$. On suppose que pour tout $x \in ]a; b[$, $g''(x) \geqslant 0$ et on note

$$\forall x \in ]a; b[\,, \qquad \tau(x) = \frac{g(x) - g(a)}{x - a}.$$

1. Par hypothèse, $g$ est deux fois dérivable donc $\mathscr{C}^1$ sur $]a; b[$. De plus, $x \mapsto x - a$ est $\mathscr{C}^1$ sur $]a; b[$ en tant que fonction polynomiale et ne s'annule pas sur cet intervalle. Donc par quotient,

$$\boxed{\tau \text{ est } \mathscr{C}^1 \text{ sur } ]a; b[.}$$

   De plus, on a directement,

$$\boxed{\forall x \in ]a; b[\,, \qquad \tau'(x) = \frac{g'(x)(x - a) - (g(x) - g(a))}{(x - a)^2}.}$$

2. Soit $x \in ]a; b[$. La fonction $g$ est continue sur $[a; b]$ donc sur $[a; x]$. De plus $g$ est deux fois dérivable sur $]a; b[$ donc dérivable sur $]a; x[$. Donc par l'identité des accroissements finis,

$$\exists c_x \in ]a; x[\,, \qquad g(x) - g(a) = g'(c_x)(x - a).$$

   Donc par la question précédente,

$$\begin{aligned} \tau'(x) = \frac{g'(x)(x - a) - (g(x) - g(a))}{(x - a)^2} = \tau'(x) &= \frac{g'(x)(x - a) - g'(c_x)(x - a)}{(x - a)^2} \\ &= \frac{g'(x) - g'(c_x)}{x - a} \qquad \text{car } x \neq a. \end{aligned}$$

   Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in ]a; b[\,, \exists c_x \in ]a; b[\,, \qquad \tau'(x) = \frac{g'(x) - g'(c_x)}{x - a}.}$$

3. Par hypothèse, $g''$ est positive sur $]a; b[$. Donc $g'$ est croissante sur $]a; b[$. Soit $x \in ]a; b[$. Alors avec les notations de la question précédente, $a < c_x < x$. Donc par croissance de $g'$,

$$g'(c_x) \leqslant g'(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad g'(x) - g'(c_x) \leqslant 0.$$

   Or $x - a > 0$, donc

$$\tau'(x) = \frac{g'(x) - g'(c_x)}{x - a} \geqslant 0.$$

   Ceci étant vrai pour $x \in ]a; b[$ quelconque, on en déduit que

$$\forall x \in ]a; b[\,, \qquad \tau'(x) \geqslant 0.$$

   Conclusion,

$$\boxed{\text{la fonction } \tau \text{ est croissante sur } ]a; b[.}$$

## Partie 2 : Une application

Soit

$$f: \begin{array}{rcl} ]0;1[ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\arcsin(x^2)}{x} \end{array}$$

4. Posons

$$g: \begin{array}{rcl} [0;1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \arcsin\left(x^2\right). \end{array}$$

La fonction arcsinus est continue sur $[-1;1]$ et deux fois dérivable sur $]-1;1[$. La fonction $c : x \mapsto x^2$ est deux fois dérivable sur $[0;1]$ et $c\left([0;1]\right) = [0;1]$ et $c\left(]0;1[\right) = ]0;1[$. Donc par composée, $g$ est continue sur $[0;1]$ et deux fois dérivable sur $]0;1[$. De plus, pour tout $x \in ]0;1[$,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}} \\ g''(x) &= \frac{2\sqrt{1-x^4} - \frac{2x\left(-4x^3\right)}{2\sqrt{1-x^4}}}{1-x^4} = \frac{2\left(1-x^4\right)+4x^4}{\left(1-x^4\right)^{3/2}} = \frac{2+2x^4}{\left(1-x^4\right)^{3/2}}. \end{aligned}$$

On observe donc

$$\forall x \in ]0;1[\,, \qquad g''(x) \geqslant 0.$$

Donc par la partie précédente, la fonction $\tau : x \mapsto \frac{g(x)-g(0)}{x-0}$ est croissante sur $]0;1[$. Or

$$\forall x \in ]0;1[\,, \qquad \tau(x) = \frac{\arcsin\left(x^2\right) - \arcsin(0)}{x} = \frac{\arcsin\left(x^2\right)}{x} = f(x).$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est croissante sur } ]0;1[.}$$

5. La fonction $f$ est dérivable sur $]0;1[$ comme composée et quotient de fonctions qui le sont et

$$\forall x \in ]0;1[\,, \qquad f'(x) = \frac{\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}x - \arcsin\left(x^2\right)}{x^2} = \frac{2}{\sqrt{1-x^4}} - \frac{\arcsin\left(x^2\right)}{x^2}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in ]0;1[\,, \qquad f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1-x^4}} - \frac{\arcsin\left(x^2\right)}{x^2}.}$$

6. Par ce qui précède, la fonction $f$ est croissante sur $]0;1[$ donc par la question précédente,

$$\begin{aligned} \forall x \in ]0;1[\,, \quad f'(x) \geqslant 0 \quad &\Rightarrow \quad \forall x \in ]0;1[\,, \quad \frac{2}{\sqrt{1-x^4}} - \frac{\arcsin\left(x^2\right)}{x^2} \geqslant 0 \\ &\Rightarrow \quad \forall x \in ]0;1[\,, \quad \frac{2}{\sqrt{1-x^4}} \geqslant \frac{\arcsin\left(x^2\right)}{x^2} \\ &\Rightarrow \quad \forall x \in ]0;1[\,, \quad \frac{2x^2}{\sqrt{1-x^4}} \geqslant \arcsin\left(x^2\right) \qquad \text{car } x^2 > 0. \end{aligned}$$

Posons $t = x^2$, alors quand $x$ décrit $]0;1[$, $t$ décrit $]0;1[$ et on obtient donc que

$$\boxed{\forall t \in ]0;1[\,, \qquad \arcsin(t) \leqslant \frac{2t}{\sqrt{1-t^2}}.}$$

7. Soit $x \in ]0;1[$. On sait que
$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1-x^4}} - \frac{\arcsin\left(x^2\right)}{x^2}.$$
Or $\arcsin\left(x^2\right) > 0$ et $x^2 > 0$ donc $\frac{\arcsin\left(x^2\right)}{x^2} > 0$. Conclusion,
$$\boxed{\forall x \in ]0;1[\,, \qquad f'(x) \leqslant \frac{2}{\sqrt{1-x^4}}.}$$

8. Soit $x \in \left]0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right[$. Alors,
$$\begin{aligned} 0 \leqslant x^4 \leqslant \frac{1}{4} \qquad &\Rightarrow \qquad 1 \geqslant 1 - x^4 \geqslant 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \\ &\Rightarrow \qquad 1 \geqslant \sqrt{1-x^4} \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2} > 0 \\ &\Rightarrow \qquad 2 \leqslant \frac{2}{\sqrt{1-x^4}} \leqslant \frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \\ &\Rightarrow \qquad \frac{2}{\sqrt{1-x^4}} \leqslant \frac{4}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$
Donc par la question précédente,
$$\forall x \in \left]0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right[, \qquad f'(x) \leqslant \frac{4}{\sqrt{3}}.$$
*Attention, ce résultat seul ne suffit !* De plus par la question 4. $f$ est croissante donc $f'$ est positive sur $]0;1[$ donc sur $\left]0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right[$. D'où
$$\forall x \in \left]0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right[, \qquad |f'(x)| = f'(x) \leqslant \frac{4}{\sqrt{3}}.$$
Soit $(x, y) \in \left]0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right[^2$, $x \neq y$. Alors $f$ est continue sur $[x;y]$ (ou $[y;x]$) et dérivable sur $]x;y[$ (ou $]y;x[$) donc par le théorème des accroissements finis,
$$|f(x) - f(y)| \leqslant \sup_{t \in ]x;y[} |f'(t)|\,|x-y| \leqslant \frac{4}{\sqrt{3}}\,|x-y|$$
ce qui reste vrai si $x = y$. Conclusion,
$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est } \frac{4}{\sqrt{3}}\text{-lipschitzienne sur } \left]0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right[.}$$

## Partie 3 : Une fonction par morceaux

On considère
$$\varphi : \begin{array}{rcl} [-1;1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \frac{\arcsin\left(x^2\right)}{x} & \text{si } x \in ]0;1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x & \text{si } x \in [-1;0[\,. \end{cases} \end{array}$$

9. On sait que $\arcsin(u) \underset{u \to 0}{\sim} u$. Donc en posant $u = x^2 \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$, on a
$$\varphi(x) = \frac{\arcsin\left(x^2\right)}{x} \underset{\substack{x \to 0 \\ x > 0}}{\sim} \frac{x^2}{x} = x.$$

Ainsi,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} \varphi(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} x = 0.$$

De plus $\lim_{\substack{x\to 0\\x<0}} \varphi(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\x<0}} x = 0$. Donc

$$\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} \varphi(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\x<0}} \varphi(x) = \varphi(0) = 0.$$

Par conséquent, $\varphi$ est continue en 0. Or $x \mapsto \frac{\arcsin(x^2)}{x}$ est continue sur $]0;1]$ (car la fonction arcsin l'est sur $[-1;1]$) et $x \mapsto x$ est continue sur $[-1;0[$. Donc $\varphi$ est aussi continue sur $[-1;0[$ et sur $]0;1]$. Conclusion,

$$\boxed{\text{la fonction } \varphi \text{ est continue } [-1;1].}$$

10. La fonction $\varphi$ est continue sur $]-1;1[$. De plus $x \mapsto \frac{\arcsin(x^2)}{x}$ est $\mathscr{C}^1$ sur $]0;1[$ et $x \mapsto x$ est $\mathscr{C}^1$ sur $]-1;0[$. Donc $\varphi$ est $\mathscr{C}^1$ sur $]-1;0[\cup]0;1[$. De plus, $\forall x \in ]0;1[$, $\varphi(x) = f(x)$ donc par la partie 2,

$$\forall x \in ]0;1[, \qquad \varphi'(x) = \frac{2}{\sqrt{1-x^4}} - \frac{\arcsin\left(x^2\right)}{x^2}.$$

Or

$$\frac{\arcsin\left(x^2\right)}{x^2} \underset{\substack{x\to 0\\x>0}}{\sim} \frac{x^2}{x^2} = 1.$$

Ainsi,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} \varphi'(x) = 2 - 1 = 1.$$

D'autre part, pour tout $x \in ]-1;0[$, on a$\varphi'(x) = 1$. Donc $\lim_{\substack{x\to 0\\x<0}} \varphi'(x) = 1 = \lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} \varphi'(x)$. Donc $\lim_{\substack{x\to 0\\x\neq 0}} \varphi'(x)$ existe et

$$\lim_{\substack{x\to 0\\x\neq 0}} \varphi'(x) = 1.$$

Donc $f$ est continue sur $]-1;1[$, $\mathscr{C}^1$ sur $]-1;0[\cup]0;1[$ et $\lim_{\substack{x\to 0\\x\neq 0}} \varphi'(x) = 1$ donc par le théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$,

$$\text{la fonction } \varphi \text{ est } \mathscr{C}^1 \text{ en } 0 \text{ et } f'(0) = 1.$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{la fonction } \varphi \text{ est } \mathscr{C}^1 \text{ sur } ]-1;1[.}$$

11. (a) On sait que $(1+u)^{-1/2} \underset{u\to 0}{=} 1 - \frac{u}{2} + o(u)$. Posons $u = -x^2 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. Donc

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right).$$

Or la fonction arcsin est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ sur $]-1;1[$. Donc par le théorème de primitivation des développements limités,

$$\arcsin(x) \underset{x\to 0}{=} \arcsin(0) + x + \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right).$$

Conclusion,

$$\boxed{\arcsin(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right).}$$

(b) Par la question précédente, $\arcsin(u) \underset{u\to 0}{=} u + \frac{u^3}{6} + o\left(u^3\right)$. Posons $u = x^2 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. Alors,

$$\arcsin\left(x^2\right) \underset{x\to 0}{=} x^2 + \frac{x^6}{6} + o\left(x^6\right).$$

Donc

$$\arcsin\left(x^2\right) \underset{x\to 0}{=} x^2 + \frac{x^6}{6} + o\left(x^6\right).$$

Ainsi

$$\varphi(x) \underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{=} \frac{\arcsin\left(x^2\right)}{x^2} \underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{=} x + \frac{x^5}{6} + o\left(x^5\right).$$

Supposons $\varphi$ $\mathscr{C}^5$ en 0. Alors par le théorème de Taylor-Young, il existe $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \in \mathbb{R}^5$ tel que

$$\varphi(x) \underset{x\to 0}{=} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + o\left(x^5\right).$$

Donc par unicité du développement limité,

$$a_0 = a_2 = a_3 = a_4 = 0 \qquad a_1 = 1, \qquad a_5 = \frac{1}{6}.$$

Cependant, on observe également que

$$\varphi(x) \underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{=} x \underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{=} x + o\left(x^5\right).$$

Donc toujours par unicité du développement limité, on obtient que

$$a_0 = a_2 = a_3 = a_4 = 0 \qquad a_1 = 1, \qquad a_5 = 0.$$

Donc $\frac{1}{6} = a_5 = 0$, contradiction. Conclusion,

$$\boxed{\text{la fonction } \varphi \text{ n'est pas } \mathscr{C}^5 \text{ en } 0.}$$

*Par contre nous n'avons pas déterminé dans ce problème si $\varphi$ était $\mathscr{C}^2$, $\mathscr{C}^3$ ou $\mathscr{C}^4$...*