Epreuve de mathématiques 6
2021-2022

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé
Durée : 4h

Encadrer les résultats et numéroter les copies

Problème 1 - Suites numériques

On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f(x) = x + \frac{1}{16} - \frac{x^3}{2}.$$

Partie 1 : Préliminaires sur f

1. Justifier que $\frac{1}{2} < \sqrt{\frac{2}{3}} < 1$ puis en déduire que $0 < f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) < 1$.
2. Déterminer le tableau de variation complet de f sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer le signe de $f(x) - x$ sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ est stable par f i.e. $f\left(\left[\frac{1}{2}; 1\right]\right) \subseteq \left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

Partie 2 : Une suite récurrente

5. *(Question indépendante)* On pose $a_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_{n+1} = f(a_n) + \frac{a_n^3}{2}$. Déterminer une expression explicite de a_n en fonction de n.

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

6. Représenter le comportement de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en annexe **(à rendre avec la copie).**
7. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1$.
8. Déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
9. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
10. Etudier les variations de f' sur $\mathbb{R}$.
11. Montrer que f est $\frac{5}{8}$-lipschitzienne sur $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$.
12. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|u_n - \frac{1}{2}\right| \leqslant \left(\frac{5}{8}\right)^n$.
13. Retrouver le résultat de la question 9.

Partie 3 : Une suite implicite

On pourra admettre dans la suite que $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) > \frac{9}{16}$.

14. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{n} + \frac{1}{16}$ admet une unique solution sur $\left[0; \sqrt{\frac{2}{3}}\right]$. On note x_n cette solution.
15. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$ est décroissante.
16. En déduire que $(x_n)_{n\geqslant 2}$ converge et préciser sa limite.
17. Montrer que pour tout $n \geqslant 3$,
$$\frac{1}{n} \leqslant x_n \leqslant \frac{2}{n}.$$
18. Retrouver alors le résultat de la question 16.
19. Montrer que $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.
20. En déduire qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ que l'on précisera tel que
$$x_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} + \frac{a}{n^2} + \frac{b}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Partie 4 : L'incontournable série harmonique

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on fixe $x_1 = 1$ et on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}, \qquad H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \qquad T_n = \sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{1}{k} \qquad \text{et} \qquad X_n = \sum_{k=n}^{2n} x_k.$$

21. Montrer que $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.
22. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = H_{2n} - H_n$.
23. Montrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
24. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n \geqslant \frac{1}{2}$.
25. Montrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.
26. Montrer que $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge vers $+\infty$.
27. En déduire que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge vers $+\infty$.

Problème 2 - Espaces vectoriels

Pour $n \geqslant 2$ et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible, on définit les ensembles

$$\mathscr{S}(P) = \{ M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid PM = MP \} \qquad \text{et} \qquad \mathscr{A}(P) = \{ M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid PM = -MP \}.$$

1. Montrer que $\mathscr{S}(P)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
   On admet que de même $\mathscr{A}(P)$ est un espace vectoriel $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Partie 1 : Etude d'un exemple

On suppose dans cette partie que $n = 2$ et $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

2. Calculer P^2. En déduire que $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et préciser son inverse.
3. Déterminer une base $\mathscr{S}(P)$.
4. Montrer que (I_2, P) est une base de $\mathscr{S}(P)$.
5. Déterminer une base de $\mathscr{A}(P)$.
6. Montrer que $\mathscr{S}(P)$ et $\mathscr{A}(P)$ sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Partie 2 : Cas général

On suppose à nouveau $n \geqslant 2$ et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ quelconques.

7. Montrer que $\mathscr{S}(P)$ et $\mathscr{A}(P)$ sont en somme directe.

On suppose que $P^2 = I_n$.

8. Montrer que $\mathscr{S}(P)$ et $\mathscr{A}(P)$ sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Problème 3 - Polynômes

Pour tout $\mu \in \mathbb{R}$, on pose $P_\mu = X^3 + \mu X^2 + \mu X + 1$.

Partie 1 : Révisions sur les racines complexes

1. (a) Préciser les racines (y compris complexes) de P_0.
   (b) Vérifier les relations racines-coefficients.
   (c) Factoriser P_0 dans $\mathbb{R}[X]$.
2. (a) Préciser les racines (y compris complexes) de P_1.
   (b) En déduire la factorisation de P_1 dans $\mathbb{R}[X]$.

Partie 2 : Factorisation en degré 3

Soit $\mu \in \mathbb{R}$.

3. Montrer que -1 est une racine de P_μ.
4. Déterminer, suivant la valeur de μ, la multiplicité de -1 pour P_μ.
5. (a) Calculer la division euclidienne de P_μ par $X^2 + 3X + 2$.
   (b) Déterminer les valeurs de μ pour lesquels $X^2 + 3X + 2$ divise P_μ.
6. Suivant les valeurs de μ, factoriser P_μ dans $\mathbb{R}[X]$.
7. Vérifier la cohérence avec la question 2.b.
8. Lorsque $\mu = 3$, vérifier la cohérence avec la question 4.
9. Pour quelles valeurs de μ, P_μ est-il scindé ?

Problème 4 - Polynômes

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'ensemble

$$\mathscr{S} = \{ P \in \mathbb{R}[X] \mid (X+1)\, P' = nP \}.$$

1. Montrer que $\mathscr{S}$ est un espace vectoriel.

Soit $P \in \mathscr{S}$, $P \neq 0_{\mathbb{R}[X]}$. On note $d = \deg(P)$.

2. Déterminer d.
3. Justifier que -1 est une racine de P.
4. Soit $a \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$. On suppose que a est une racine de P. On note m la multiplicité de a pour P.
   (a) Montrer que $m \geqslant 2$.
   (b) Calculer la dérivée $m-1$-ième de $(X+1)\, P'$.
   (c) Conclure à une contradiction.
5. En déduire la factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$.
6. Déterminer $\mathscr{S}$.

ANNEXE

Nom/Prénom :