Commentaires sur le Devoir Surveillé 6
Suites numériques, polynômes, espaces vectoriels

Problème I - Suites numériques

Partie 1 : Préliminaires sur f

1. La première inégalité était facile et vous l'avez souvent bien rédigée. La seconde vous a posé plus de difficultés. Certains se sont lancés directement par une étude de la fonction f. Lisez tout le sujet avant de commencer ! C'est important de prendre le temps de bien lire tout l'énoncé, pour comprendre quelle est l'idée générale, s'il n'y a pas des réponses données en deuxième partie pour vous aider sur le début, pour savoir là où vous voulez davantage vous investir car vous savez que vous devriez y être plus efficace. Sinon les inégalités dans $\mathbb{R}$ posent encore quelques difficultés à certains d'entre vous.

2. Pas de difficultés mais bien traitée dans la plupart des cas. Un étudiant ou deux essayent de décroitre jusqu'à $-\infty$. N'oubliez pas de préciser les limites aux bornes et les valeurs ou au moins les expressions de extremums locaux. Mais en très grande majorité vous y pensez.

3. Là aussi, pas de difficulté. N'oubliez pas de faire une conclusion propre. Ou par des phrases ou par un tableau. Vous êtes plusieurs à avoir fait une étude de fonction. La résolution de l'équation $f(x)-x \geqslant 0$ pouvait se faire directement. Une remarque de rédaction : il est préférable pour l'étude d'un signe (de $f(x)-x$ ou d'une dérivée en générale) de résoudre une **inéquation** $\geqslant 0$ ou $\leqslant 0$ pour obtenir le signe. Plutôt que de résoudre $= 0$ qui ne vous donne que les valeurs d'annulation.

4. Des réponses moins rigoureuses, ce n'est pas toujours clair, vous alignez souvent des arguments et on ne voit pas bien leur utilité. La meilleure façon d'être clair est de faire référence au tableau de variations. Trop de forçage, retravailler la rédaction.

Partie 2 : Une suite récurrente

5. *(Question indépendante)* C'était cadeau, beaucoup l'on accepté (et ils ont eu raison). Souvent bien rédigée. Ceux qui ne reconnaissent pas une suite arithmétique doivent bien retravailler leurs suite de référence. Certains ont cru y voir une suite arithmético-géométrique. Perdu.

6. Il y a trois catégories de mathématiciens : ceux qui savent compter et ceux qui ne savent pas. De même sur cette question, deux catégories d'étudiants, ceux qui ont compris cette partie du cours et ceux qui ne l'ont pas comprise ni retravaillée. Cela fait partie des basiques sur les suites récurrentes, à ne pas laisser en l'état pour ceux qui ne l'ont pas réussie. Légendez bien en plaçant u_0, u_1 et u_2 pour faire comprendre ce que vous tracez.

7. Pas toujours réussie, certains ont invoqué la croissance de f sur $[1/2; 1]$ ce qui était faux. Une petite récurrence avec la question 4. et hop c'était dans la poche. Quelques bonnes réponses.

8. Plusieurs méthodes. Il était possible de rebricoler directement en sachant que $u_n \in [1/2; 1]$ pour minorer $u_{n+1} - u_n$ par 0. Sinon avec la question 3. c'était directe. J'en ai vu plusieurs (pas juste un ou deux !!!) qui rédigent encore :

$$\text{Posons } \mathscr{P}(n) : « \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n. »$$

Qu'est-ce que je vous ai fait pour mériter une telle insolence ? Je réfléchis à une façon de lobotomiser la partie de votre cerveau qui vous a fait écrire cela MALGRE mes nombreuses insistances sur ce sujet. Vous n'aurez pas le dernier mot, foi d'enseignant.

9. Tout le monde ne pense pas à bien écrire « par le théorème de convergence monotone ». Beaucoup de parachutages pour la limite. Certains confondent la borne inférieure/la limite avec UN minorant. Ce n'est pas parce que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroit et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 1/2$ que forcément $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $1/2$. Exemple : $u_n = 1 + \frac{1}{n}$ est décroissante minorée par $1/2$ et ne converge pas vers $1/2$. Plusieurs bonnes réponses.

10. Pas de difficulté.

11. Vous n'avez sans doute pas eu le temps de retravailler le DS5 car les mêmes erreurs ont parfois été commises. Certains confondent f' et $|f'|$. Il ne suffit pas de majorer f' il faut encadrer f' pour en déduire un majorant de $|f'|$. La lipschitziennité par le théorème des accroissements finis n'est pas encore totalement clair pour tout le monde. Plusieurs belles réponses cependant.

12. Un peu plus dure mais non exotique. Exactement de la même veine que vu en TD ou en DM. Il faut davantage approfondir votre compréhension des exercices par vous même : bienvenus au second semestre.

13. Facile et pourtant pas toujours réussie... Rien de plus simple que le théorème d'encadrement !

Partie 3 : Une suite implicite

14. Vous avez été perturbés par le fait qu'il n'y avait qu'une seule fonction f et pas une famille de f_n. Pourtant cela ne pose pas plus de difficulté et là aussi c'est du classique vu en TD et DM. Peu ont pensé à bien justifier que $\frac{1}{n} + \frac{1}{16} \in \left[f(0); f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\right]$. Certains confondent et donnent $\frac{1}{n} + \frac{1}{16} \in \left[0; \sqrt{\frac{2}{3}}\right]$ ou $f\left(\left[0; \sqrt{\frac{2}{3}}\right]\right)$ alors que c'est ce que l'on cherche à démontrer ! ! ! D'autres confondent aussi le théorème des accroissements finis et son corollaire. A bien savoir rédiger proprement, car vos réponses sont majoritairement confuses.

15. Question moins souvent traitée et plus dure en effet, mais sans astuce supplémentaire que ce que l'on a vu en TD/DM.

16. Encore un coup de convergence monotone. Plus de difficultés ici aussi pour trouver la limite. A reprendre avec le corrigé.

17. Une ou deux très bonnes réponses. Non traitée sinon.

18. Facile.

19. Non traitée. Certains ont tenté le théorème d'encadrement des équivalents... en affirmant $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n}$. Trois jours d'hospitalisation... C'est ce qu'il m'a fallu pour que je puisse m'en remettre.

20. Non traitée.

Partie 4 : L'incontournable série harmonique

21. Bien globalement.

22. Pas mal de bonnes réponses. N'oubliez pas de justifier quel changement d'indice vous faites.

23. Deux trois bonnes réponses mais plusieurs absurdités. Du style $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ croissante donc tout pareil pour H_{2n} et $H_{2n} - H_n$. Ben voyons. Plus subtil mais aussi important, S_{n+1} n'est pas égal à $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+k}$ mais bien $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+k}$ ce qui rend la question plus dure. Il fallait utiliser la question précédente.

24. Facile, tout le monde ne l'a pas forcément vue.

25. Pas mal de belles réponses.

26. Dommage malgré quelques tentatives, je ne crois pas avoir vu de bonnes réponses... Alors que cela ressemblait beaucoup à un exercice du TD ! A se demander s'ils ont été assez (re)travaillés.

27. Non traitée.

Problème II - Espaces vectoriels

1. Des bonnes réponses, mais ce n'est pas clair pour tout le monde. Gare au DS7 ! ! ! Après avoir posé $Q = \lambda M + \mu N$ et après avoir montré que $QP = PQ$, il manque souvent le point de rédaction qui dit que « donc $Q \in \mathscr{S}(P)$ ». Ne l'oubliez pas, cela fait plus propre. Certains n'ont pas compris la signification de l'ensemble $\mathscr{S}(P)$ est confondent le rôle de P et de M.

Partie 1 : Etude d'un exemple

2. Facile et bien réussie. Quelques-uns se lancent dans un pivot de Gauss pour le calcul de l'inverse : inutile c'est direct par la définition.

3. Trop peu de bonnes réponses. Beaucoup ne savent pas quoi faire et quelques-uns se trompent dans les calculs. A savoir faire !

4. Il faut avant tout montrer que I_2 et P sont des éléments de $\mathscr{S}(P)$ cette subtilité vous a souvent échappés. Bien en général sur le caractère libre. Des parachutages sur le caractère générateur (notez qu'avec la dimension c'était facile). Là aussi à retravailler cela vous sera utile pour la suite.

5. Identique sur la méthode à la question 3.

6. Rarement traitée.

Partie 2 : Cas général

7. Bien sur le démarrage mais le passage $MP = 0_n \Rightarrow M = 0_n$ n'a pas été justifié. Certains disent que c'est parce que $P \neq 0_n$ ce qui est faux ! Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ vérifient $AB = 0_2$ et pourtant ni A ni B ne sont nuls. Un grand basique des matrices. Il fallait justifier que $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Cf corrigé.

8. Non traitée et pourtant tellement intéressante.

Problème III - Polynômes

Partie 1 : Révisions sur les racines complexes

1. (a) Je rappelle que -1, i^2, $\mathrm{e}^{i\pi}$ ou même $\mathrm{e}^{i\pi+2k\pi}$ sont des écritures différentes *du même* complexe -1. Par factorisation avec -1 évidente (ou évidente après avoir bien lu le sujet et donc la question 3.) puis discriminant. Sinon comme a fait l'auteur du corrigé, c'est bien. Attention vous êtes nombreux à vouloir résoudre $X^3 = -1$. Cela n'a aucun sens. **Le polynôme** X^3 n'est pas égal au **polynôme** constant -1. Il faut poser $z \in \mathbb{C}$ et résoudre $P_{-1}(z) = 0$ i.e. $z^3 = -1$.
   (b) Plutôt bien dans l'ensemble. Maintenant l'assertion « pour tout E étudiant de PTSI1, E connaît son cours » est fausse... Certains se débinent ou se trompent. Inadmissible. N'hésitez pas à introduire proprement les coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_n$.
   (c) Justifiez votre résultat ! ! ! Certains se contentent d'écrire le résultat. Soyez attentifs à la consigne on parlait bien de $\mathbb{R}[X]$.

2. (a) Mêmes remarques que ci-dessus. Je rappelle que les racines de ce polynôme c'est du cours ! ! ! Et je vous avais conseillé de réviser cette partie des complexes. Faut écouter son prof.
   (b) Idem à la 1.c

Partie 2 : Factorisation en degré 3

3. Facile bien traitée. On pouvait faire avec une écriture factorisée. L'évaluation marche bien également. N'oubliez pas de justifier que $n \neq 0$ mais beaucoup y pensent.

4. De belles réponses. Mais certains ne traitent que le cas $\mu = 3$. Et sinon ? De plus, pour obtenir la multiplicité n'oubliez pas de justifier que $P_3'''(-1) \neq 0$.

5. (a) Plutôt réussie dans l'ensemble.
   (b) Moins bien rédigée.

6. Beaucoup n'ont pas compris cette question. Se contentent du début de la factorisation sans démontrer si le facteur $X^2 + (\mu - 1) X + 1$ était irréductible ou non. Il était ici inutile de traiter les cas $\mu = -1$ et $\mu = 3$ à part. Certains sont partis sur $\mu = \frac{7}{2}$. Je comprends que la question précédente pouvait y faire penser mais c'était inutile ici.

7. Le point ne pouvait se prendre que si la question précédente avait été réussie même si j'ai parfois été un peu généreux dans mon barème.

8. Idem.

9. Facile mais nécessitait la question 6.

Problème IV - Polynômes

1. Du bon et du moins bon. Gare au DS7 ! ! ! !

2. Très décevant dans l'ensemble. Je crois que j'ai une seule bonne réponse alors que c'est du classique vu et revu en TD. Si le degré ne donne rien (c'était le cas ici) on passe au terme dominant ! Retravaillez mieux les TD et prenez un peu de recul.

3. Facile.

4. (a) Bien dans l'ensemble, pas toujours réussie mais de belles réponses.
   (b) Moins bien traitée, pourtant un petit coup de Leibniz résolvait le problème.
   (c) Non traitée. Plus dure mais intéressante !

5. Non traitée.

6. Non traitée