Corrigé du Devoir Surveillé 6
Suites numériques, polynômes, espaces vectoriels

Problème I - Suites numériques

On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = x + \frac{1}{16} - \frac{x^3}{2}.$$

Partie 1 : Préliminaires sur f

1. On sait que $\frac{1}{4} < \frac{2}{3} < 1$ donc par la stricte croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$,

$$\boxed{\frac{1}{2} < \sqrt{\frac{2}{3}} < 1.}$$

D'autre part,

$$f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \sqrt{\frac{2}{3}} + \frac{1}{16} - \frac{1}{2}\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} + \frac{1}{16}.$$

Donc par l'encadrement précédente de $\sqrt{\frac{2}{3}}$, on obtient que

$$0 < f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) < \frac{2}{3} + \frac{1}{16} = \frac{35}{48} < 1.$$

Conclusion,

$$\boxed{0 < f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) < 1.}$$

2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale et pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = 1 - \frac{3x^2}{2}.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f'(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 > \frac{3x^2}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 < \frac{2}{3} \quad \Leftrightarrow \quad -\sqrt{\frac{2}{3}} < x < \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

De plus, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $f\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = -\sqrt{\frac{2}{3}} + \frac{1}{16} + \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{1}{16} - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$, $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} + \frac{1}{16}$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

Conclusion, on obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{2}{3}}$		$\sqrt{\frac{2}{3}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{16} - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\nearrow$	$\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} + \frac{1}{16}$	$\searrow$	$-\infty$

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, posons $g(x) = f(x) - x$. Alors,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g(x) = \frac{1}{16} - \frac{x^3}{2}.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$g(x) > 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{1}{16} > \frac{x^3}{2} \qquad \Leftrightarrow \qquad x^3 < \frac{1}{8} = \frac{1}{2^3} \qquad \Leftrightarrow \qquad x < \frac{1}{2},$$

car la fonction $x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Ainsi,

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f(x) - x$		$+$	0	$-$	

4. Par la question 1. $\frac{1}{2} < \sqrt{\frac{2}{3}} < 1$. De plus,

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{16} - \frac{1}{8 \times 2} = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad f(1) = 1 + \frac{1}{16} - \frac{1}{2} = \frac{16 + 1 - 8}{16} = \frac{9}{16}.$$

Donc par la question 2.

x	$\frac{1}{2}$		$\sqrt{\frac{2}{3}}$		1
f	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} + \frac{1}{16}$	$\searrow$	$\frac{9}{16}$

Or $\frac{9}{16} > \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$. Ainsi, pour tout $x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$, on a $\frac{1}{2} \leqslant f(x) \leqslant f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$. Or par la question 1. $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) < 1$. D'où

$$\forall x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right], \qquad \frac{1}{2} \leqslant f(x) \leqslant 1.$$

Autrement dit,

$$\boxed{f\left(\left[\frac{1}{2}; 1\right]\right) \subseteq \left[\frac{1}{2}; 1\right].}$$

Partie 2 : Une suite récurrente

5. *(Question indépendante)* On pose $a_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_{n+1} = f(a_n) + \frac{a_n^3}{2}$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{16} - \frac{a_n^3}{2} + \frac{a_n^3}{2} = a_n + \frac{1}{16}.$$

Donc la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $\frac{1}{16}$. Ainsi,

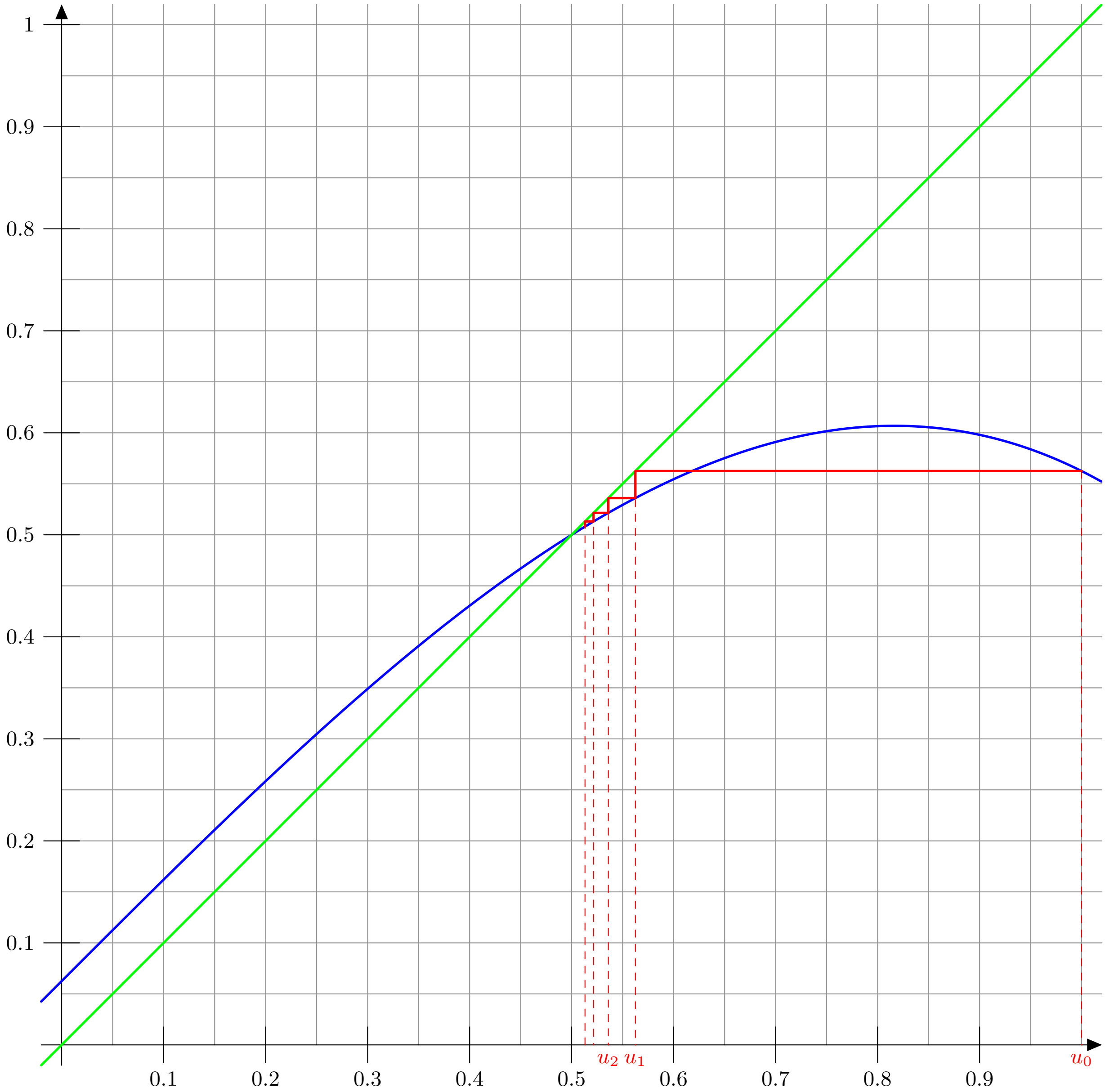
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_n = a_0 + \frac{n}{16} = 1 + \frac{n}{16}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_n = 1 + \frac{n}{16}.}$$

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

6. On a la représentation graphique suivante :



7. On procède par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathscr{P}(n)$: « $u_n \in \left[\frac{1}{2};1\right]$ ».
Initialisation. Si $n = 0$, alors $u_0 = 1 \in \left[\frac{1}{2};1\right]$. Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie i.e. $u_n \in \left[\frac{1}{2};1\right]$. Alors,

$$u_{n+1} = f(u_n) \in f\left(\left[\frac{1}{2};1\right]\right).$$

Or par la question 4. $f\left(\left[\frac{1}{2};1\right]\right) \subseteq \left[\frac{1}{2};1\right]$. Donc $u_{n+1} \in \left[\frac{1}{2};1\right]$ et $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1.}$$

8. D'après la question 3. pour tout $x \in \left[\frac{1}{2};+\infty\right[$, $f(x)-x \leqslant 0$. Or par la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[\frac{1}{2};1\right] \subseteq \left[\frac{1}{2};+\infty\right[$. Donc en prenant $x=u_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$f(u_n)-u_n \leqslant 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad f(u_n) \leqslant u_n \qquad \Leftrightarrow \qquad u_{n+1} \leqslant u_n.$$
Conclusion,
$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$$

9. Par ce qui précède la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par $\frac{1}{2}$ donc par le théorème de convergence monotone,
$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge.}}$$
Notons ℓ sa limite. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Or $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ en tant que suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. D'autre part, f est continue sur $\mathbb{R}$ donc en ℓ donc par la caractérisation séquentielle de la continuité, $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(\ell)$. Ainsi par passage à la limite, on obtient que
$$\ell = f(\ell) \qquad \Leftrightarrow \qquad f(\ell)-\ell = 0.$$
Conclusion, par la question 3. on en déduit que
$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}.}$$

10. Par la question 2. on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 1-\frac{3x^2}{2}$. La fonction carrée étant strictement décroissante que $\mathbb{R}_-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit que f' est strictement croissante sur $\mathbb{R}_-$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$. De plus,
$$\lim_{x\to-\infty} f'(x) = -\infty, \qquad f'(0)=1, \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} f'(x) = -\infty.$$
Ainsi,

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	$-\infty$ $\nearrow$	1	$\searrow$ $-\infty$

11. La fonction f' est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$ donc sur $\left[\frac{1}{2};1\right]$. Ainsi,
$$\begin{aligned}\forall x \in \left[\frac{1}{2};1\right], \qquad f'(1) \leqslant f'(x) \leqslant f'\left(\frac{1}{2}\right) \qquad &\Leftrightarrow \qquad 1-\frac{3}{2} \leqslant f'(x) \leqslant 1-\frac{3}{2\times 4}\\ &\Leftrightarrow \qquad -\frac{1}{2} \leqslant f'(x) \leqslant \frac{5}{8}.\end{aligned}$$
Or $\frac{5}{8} \geqslant \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$. Donc
$$\forall x \in \left[\frac{1}{2};1\right], \qquad |f'(x)| \leqslant \frac{5}{8}.$$
Soit $(x,y) \in \left[\frac{1}{2};1\right]^2$, $x \neq y$. Alors, on remarque que f est continue sur $[x;y]$ (ou $[y;x]$) et dérivable sur $]x;y[$ (ou $]y;x[$). Donc par le théorème des accroissements finis, on a
$$|f(x)-f(y)| \leqslant \sup_{t\in]x;y[} |f'(t)|\,|x-y| \leqslant \sup_{t\in\left[\frac{1}{2};1\right]} |f'(t)|\,|x-y| \leqslant \frac{5}{8}|x-y|.$$
Ce qui reste encore vrai si $x=y$. Conclusion,
$$\boxed{f \text{ est } \frac{5}{8}\text{-lipschitzienne sur } \left[\frac{1}{2};1\right].}$$

12. Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $x = u_n$ et $y = \frac{1}{2}$. Alors par la question 7. on a $u_n \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$ et il en va de même pour $\frac{1}{2}$. Donc par la question précédente,

$$\left| f(u_n) - f\left(\frac{1}{2}\right) \right| \leqslant \frac{5}{8} \left| u_n - \frac{1}{2} \right|.$$

Or par définition $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \left| u_{n+1} - \frac{1}{2} \right| \leqslant \frac{5}{8} \left| u_n - \frac{1}{2} \right|.$$

Alors par récurrence, on observe que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \left| u_n - \frac{1}{2} \right| \leqslant \left(\frac{5}{8}\right)^n \left| u_0 - \frac{1}{2} \right| = \left(\frac{5}{8}\right)^n \left| 1 - \frac{1}{2} \right| = \left(\frac{5}{8}\right)^n \frac{1}{2} \leqslant \left(\frac{5}{8}\right)^n.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \left| u_n - \frac{1}{2} \right| \leqslant \left(\frac{5}{8}\right)^n.}$$

13. Puisque $\frac{5}{8} < 1$, alors on en déduit que

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{5}{8}\right)^n = 0.$$

Or par la question précédente, $0 \leqslant \left| u_n - \frac{1}{2} \right| \leqslant \left(\frac{5}{8}\right)^n$. Donc par le théorème d'encadrement,

$$\lim_{n \to +\infty} \left| u_n - \frac{1}{2} \right| = 0 \qquad \text{i.e.} \qquad \boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{1}{2}.}$$

On retrouve bien le résultat de la question 9.

Partie 3 : Une suite implicite

On pourra admettre dans la suite que $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) > \frac{9}{16}$.

14. Par la question 2. on sait que la fonction f est strictement croissante sur $\left[0; \sqrt{\frac{2}{3}}\right]$. De plus, on a

$$f(0) = \frac{1}{16} < \frac{1}{n} + \frac{1}{16} \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{16} = \frac{9}{16} < f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right).$$

Enfin, f est continue sur $\left[0; \sqrt{\frac{2}{3}}\right]$. Donc par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires ou le théorème de la bijection, on en déduit que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2,\ \exists! x_n \in \left[0; \sqrt{\frac{2}{3}}\right], \qquad f(x_n) = \frac{1}{n} + \frac{1}{16}.}$$

15. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Par définition de x_n et de x_{n+1}, on a

$$f(x_n) = \frac{1}{n} + \frac{1}{16} > \frac{1}{n+1} + \frac{1}{16} = f(x_{n+1}).$$

Or on sait que $x_n \in \left[0; \sqrt{\frac{2}{3}}\right]$, $x_{n+1} \in \left[0; \sqrt{\frac{2}{3}}\right]$ et par la question 2. la fonction f est croissante sur $\left[0; \sqrt{\frac{2}{3}}\right]$. Ainsi,

$$x_n \geqslant x_{n+1}.$$

Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, on en déduit que

$$\boxed{\text{la suite } (x_n)_{n \geqslant 2} \text{ est décroissante.}}$$

16. On sait que $(x_n)_{n\geqslant 2}$ est décroissante. De plus par construction, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$, $x_n\geqslant 0$ donc la suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$ est minorée par 0. Donc par le théorème de convergence monotone, on en déduit que

$$\boxed{\text{la suite } (x_n)_{n\geqslant 2} \text{ converge.}}$$

On note ℓ sa limite. Par définition, on a

$$\forall n\geqslant 2,\qquad f(x_n)=\frac{1}{n}+\frac{1}{16}\quad\Leftrightarrow\quad x_n+\frac{1}{16}-\frac{x_n^3}{2}=\frac{1}{n}+\frac{1}{16}\quad\Leftrightarrow\quad x_n-\frac{x_n^3}{2}=\frac{1}{n}.$$

Par continuité de la fonction $x\mapsto x-\frac{x^3}{2}$ en ℓ (car continue sur $\mathbb{R}$) et la caractérisation séquentielle de la continuité,

$$\lim_{n\to+\infty} x_n-\frac{x_n^3}{2}=\ell-\frac{\ell^3}{2}.$$

Ainsi, par passage à la limite,

$$\begin{aligned}\ell-\frac{\ell^3}{2}=0\quad&\Leftrightarrow\quad \ell\left(1-\frac{\ell^2}{2}\right)=0\\&\Leftrightarrow\quad \ell=0 \text{ OU } \frac{\ell^2}{2}=1\\&\Leftrightarrow\quad \ell=0 \text{ OU } \ell=\sqrt{2} \text{ OU } \ell=-\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Cependant, pour tout $n\geqslant 2$, $0\leqslant x_n\leqslant\sqrt{\frac{2}{3}}$. Donc par passage à la limite,

$$0\leqslant\ell\leqslant\sqrt{\frac{2}{3}}<\sqrt{2}.$$

Donc $\ell\neq-\sqrt{2}$ et $\ell\neq\sqrt{2}$. Conclusion,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} x_n=0.}$$

17. Soit $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 3$. On a

$$f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}+\frac{1}{16}-\frac{1}{2n^3}<\frac{1}{n}+\frac{1}{16}=f(x_n).$$

Or pour $n\geqslant 3\geqslant 2$, par la question 1. $0<\frac{1}{n}\leqslant\frac{1}{2}\leqslant\sqrt{\frac{2}{3}}$. De plus, par construction, on a $x_n\in\left[0;\sqrt{\frac{2}{3}}\right]$. Enfin, la fonction f est croissante sur $\left[0;\sqrt{\frac{2}{3}}\right]$. Ainsi,

$$\frac{1}{n}\leqslant x_n.$$

De la même façon, on a

$$f\left(\frac{2}{n}\right)-f(x_n)=\frac{2}{n}+\frac{1}{16}-\frac{8}{2n^3}-\frac{1}{n}-\frac{1}{16}=\frac{1}{n}-\frac{4}{n^3}=\frac{n^2-4}{n^3}$$

Or $n\geqslant 3\geqslant 2$, donc $n^2-4\geqslant 0$ et ainsi $f\left(\frac{2}{n}\right)-f(x_n)\geqslant 0$ ou encore

$$f\left(\frac{2}{n}\right)\geqslant f(x_n)$$

Or $0<\frac{2}{n}\leqslant\frac{2}{3}<1$ et $x_n\in\left[0;\sqrt{\frac{2}{3}}\right]$. Par croissance de la fonction f sur $\left[0;\sqrt{\frac{2}{3}}\right]$,

$$\frac{2}{n}\geqslant x_n.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n\geqslant 3,\qquad \frac{1}{n}\leqslant x_n\leqslant\frac{2}{n}.}$$

18. On a
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{n}=0.$$
Donc par la question précédente et le théorème d'encadrement,
$$\boxed{(x_n)_{n\geqslant 2} \text{ converge et } \lim_{n\to+\infty} x_n=0.}$$

19. Pour tout $n\geqslant 2$, on a
$$\frac{1}{n}+\frac{1}{16}=f(x_n)=x_n+\frac{1}{16}-\frac{x_n^3}{2} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{1}{n}=x_n-\frac{x_n^3}{2}.$$
Or $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc $\frac{x_n^3}{2} \underset{n\to+\infty}{\ll} x_n$ et donc
$$\frac{1}{n}=x_n-\frac{x_n^3}{2}\underset{n\to+\infty}{\sim} x_n.$$
Conclusion,
$$\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}.}$$

20. On sait que pour tout $n\geqslant 2$, $\frac{1}{n}=x_n-\frac{x_n^3}{2}$. Or par la question précédente, $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$. Donc par élévation à la puissance,
$$x_n^3 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^3} \qquad \Leftrightarrow \qquad x_n^3 \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$
Donc
$$x_n=\frac{1}{n}+\frac{x_n^3}{2} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n}-\frac{1}{2n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$
Conclusion, $\boxed{\text{pour } a=0 \text{ et } b=-\frac{1}{2}}$, on obtient
$$\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n}-\frac{1}{2n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right).}$$

Partie 4 : L'incontournable série harmonique

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose
$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}, \qquad H_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}, \qquad T_n=\sum_{k=n+1}^{2n+1}\frac{1}{k} \qquad \text{et} \qquad X_n=\sum_{k=n}^{2n}x_k.$$

21. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On a
$$H_{n+1}-H_n=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\frac{1}{n+1}>0.$$
Conclusion,
$$\boxed{\text{La suite } (H_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est strictement croissante.}}$$

22. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Par la relation de Chasles on a
$$H_{2n}-H_n=\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}.$$

Par le glissement d'indice $\tilde{k} = k - n$, on obtient,

$$H_{2n} - H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n} = S_n.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad S_n = H_{2n} - H_n.}$$

23. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par la question précédente, on a $S_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
S_{n+1} - S_n &= \sum_{k=n+2}^{2n+2} \frac{1}{k} - \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \\
&= \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1} \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1} \\
&= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2(n+1)} \\
&= \frac{2n+2-2n-1}{2(n+1)(2n+1)} \\
&= \frac{1}{2(n+1)(2n+1)} > 0.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{La suite } (S_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est croissante.}}$$

24. Puisque $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$S_n \geqslant S_1 = \sum_{k=1+1}^{2} \frac{1}{k} = \frac{1}{2}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad S_n \geqslant \frac{1}{2}.}$$

25. On a déjà vu que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante. Montrons que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
T_{n+1} - T_n &= \sum_{k=n+2}^{2n+3} \frac{1}{k} - \sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{1}{k} \\
&= \frac{1}{2n+3} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} \\
&= \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2(n+1)} \\
&= \frac{2n+2-2n-3}{2(n+1)(2n+3)} \\
&= -\frac{1}{2(n+1)(2n+3)} < 0.
\end{aligned}$$

D'où

La suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

Enfin, on a

$$T_n - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{2n+1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On a donc bien montré que

- $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante
- $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante
- $(T_n - S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tend vers 0.

Conclusion,

$$\boxed{\text{Les suites } (S_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ et } (T_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ sont adjacentes.}}$$

26. Par la question précédente, on en déduit que les suites $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergent et vers une limite commune. Notons ℓ cette limite. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$H_{2n} - H_n = S_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell.$$

Or la suite $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement croissante. Donc par le théorème de convergence monotone deux cas seulement sont possibles :

(a) La suite $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.
(b) La suite $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ diverge vers $+\infty$.

Supposons le premier cas. Notons dans ce cas L la limite de $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. Alors $(H_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge également vers L en tant que sous-suite de $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. Dès lors,

$$H_{2n} - H_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} L - L = 0.$$

Donc par la question précédente et l'unicité de la limite, on en déduit que $\ell = 0$. Or on a vu que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n \geqslant \frac{1}{2}$. Donc par passage à la limite,

$$0 = \ell \geqslant \frac{1}{2} \qquad \text{contradiction.}$$

Le premier cas étant impossible, on en déduit que

$$\boxed{(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ diverge vers } +\infty.}$$

27. On a vu que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 3$, $x_k \geqslant \frac{1}{k}$. Donc en sommant, on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$,

$$\sum_{k=3}^{n} x_k \geqslant \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k}.$$

Ainsi, pour tout $n \geqslant 3$,

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} x_k = x_1 + x_2 + \sum_{k=3}^{n} x_k \geqslant x_1 + x_2 + \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k} = H_n + x_1 + x_2 - 1 - \frac{1}{2}.$$

Or par la question précédente, $H_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Donc

$$\lim_{n \to +\infty} H_n + x_1 + x_2 - 1 - \frac{1}{2} = +\infty.$$

Donc par le théorème de minoration, on en déduit que

$$\boxed{(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ diverge vers } +\infty.}$$

Problème II - Espaces vectoriels

Pour $n \geqslant 2$ et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible, on définit les ensembles

$$\mathscr{S}(P) = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid PM = MP\} \qquad \text{et} \qquad \mathscr{A}(P) = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid PM = -MP\}.$$

1. On observe les points suivants :
   - $\mathscr{S}(P) \subseteq \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ par définition.
   - Si $M = 0_n$. Alors, $PM = 0_n = MP$. Donc $0_n \in \mathscr{S}(P)$.
   - Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $(M, N) \in \mathscr{S}(P)^2$. Posons $Q = \lambda M + \mu N$. Alors,

     $$\begin{aligned} PQ = P(\lambda M + \mu N) = \lambda PM + \mu PN &= \lambda MP + \mu NP \qquad \text{car } M \in \mathscr{S}(P) \text{ et } N \in \mathscr{S}(P) \\ &= (\lambda M + \mu N)P = QP. \end{aligned}$$

     Donc $Q \in \mathscr{S}(P)$ et $\mathscr{S}(P)$ est stable par combinaisons linéaires.

   Conclusion,

   $$\boxed{\mathscr{S}(P) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).}$$

   On admet que de même $\mathscr{A}(P)$ est un espace vectoriel $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Partie 1 : Etude d'un exemple

On suppose dans cette partie que $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

2. On a directement

   $$P^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Donc

   $$\boxed{P^2 = I_2.}$$

   On en déduit donc que

   $$\boxed{P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \qquad \text{et} \qquad P^{-1} = P.}$$

3. Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} M \in \mathscr{S}(P) \quad &\Leftrightarrow \quad MP = PM \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2x - y & 3x - 2y \\ 2z - t & 3z - 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 3z & 2y + 3t \\ -x - 2z & -y - 2t \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x - y = 2x + 3z \\ 3x - 2y = 2y + 3t \\ 2z - t = -x - 2z \\ 3z - 2t = -y - 2t \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} y + 3z = 0 \\ 3x - 4y - 3t = 0 \\ x + 4z - t = 0 \\ y + 3z = 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

On observe que $L_1 = L_4$. Donc

$$\begin{aligned}
M \in \mathscr{S}(P) &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 4y - 3t = 0 \\ x + 4z - t = 0 \\ y + 3z = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x + 4z - t = 0 \\ 3x - 4y - 3t = 0 \\ y + 3z = 0 \end{cases} && L_1 \leftrightarrow L_2 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x + 4z - t = 0 \\ -4y - 12z = 0 \\ y + 3z = 0 \end{cases} && L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x + 4z - t = 0 \\ y + 3z = 0 \end{cases} && \text{car } L_2 = -4L_3 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = t - 4z \\ y = -3z \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad M = \begin{pmatrix} t - 4z & -3z \\ z & t \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\mathscr{S}(P) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

Posons $\mathscr{B} = \left(\begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$. Nous venons d'établir que $\mathscr{B}$ est une famille génératrice de $\mathscr{S}(P)$. De plus les deux matrices de $\mathscr{B}$ ne sont pas colinéaires donc $\mathscr{B}$ est libre. Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{B} = \left(\begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \text{ est une base de } \mathscr{S}(P).}$$

4. Montrons que (I_2, P) est une base de $\mathscr{S}(P)$. Si $M = I_2$, alors on a bien $PM = PI_2 = P = I_2P = P$. Donc $I_2 \in \mathscr{S}(P)$. De même, si $M = P$, alors $PM = P^2 = MP$ donc $P \in \mathscr{S}(P)$. Or Vect (I_2, P) est le plus petit espace vectoriel contenant I_2 et P (au sens de l'inclusion). Donc

$$\text{Vect}\,(I_2, P) \subseteq \mathscr{S}(P).$$

Méthode 1, sans la dimension. Montrons l'inclusion réciproque. Soit $M \in \mathscr{S}(P)$. Par la question précédente, puisque $\mathscr{B}$ engendre $\mathscr{S}(P)$, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$M = a \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + bI_2 = \begin{pmatrix} -4a + b & -3a \\ a & b \end{pmatrix}.$$

Puis on a

$$\begin{aligned}
M \in \mathrm{Vect}\,(I_2, P) \quad &\Leftrightarrow \quad \exists\,(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ M = xP + yI_2\\
&\Leftrightarrow \quad \exists\,(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ M = \begin{pmatrix} 2x+y & 3x \\ -x & -2x+y \end{pmatrix}\\
&\Leftrightarrow \quad \exists\,(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \begin{pmatrix} -4a+b & -3a \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y & 3x \\ -x & -2x+y \end{pmatrix}\\
&\Leftrightarrow \quad \exists\,(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \begin{cases} -4a+b = 2x+y \\ -3a = 3x \\ a = -x \\ b = -2x+y \end{cases}\\
&\Leftrightarrow \quad \exists\,(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \begin{cases} y = -4a+b-2x = -4a+b+2a = b-2a \\ x = -a \\ x = -a \\ y = b+2x = b-2a \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc en prenant $x = -a$ et $y = b - 2a$, on obtient bien que $M \in \mathrm{Vect}\,(I_2, P)$. D'où, $\mathscr{S}(P) \subseteq \mathrm{Vect}\,(I_2, P)$. Ainsi,

$$\mathscr{S}(P) = \mathrm{Vect}\,(I_2, P)$$

et (I_2, P) est génératrice dans $\mathscr{S}(P)$. De plus, I_2 et P ne sont pas colinéaires donc (I_2, P) est libre. Conclusion,

$$\boxed{(I_2, P) \text{ est une base de } \mathscr{S}(P).}$$

Méthode 2, avec la dimension. Attention, il faut toujours démontrer en amont que I_2 *et* P *sont des vecteurs de* $\mathscr{S}(P)$. Par la question précédente, puisque $\mathscr{B}$ est une base de $\mathscr{S}(P)$, on a

$$\dim(\mathscr{S}(P)) = \mathrm{Card}\,(\mathscr{B}) = 2.$$

Donc $\mathrm{Card}\,((I_2, P)) = 2 = \dim(\mathscr{S}(P))$. De plus, (I_2, P) est libre car ses deux matrices ne sont pas colinéaires. Conclusion, la dimension c'est béton,

$$\boxed{(I_2, P) \text{ est une base de } \mathscr{S}(P).}$$

5. Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. De même qu'à la question 3., on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
M \in \mathscr{A}(P) \quad &\Leftrightarrow \quad MP = -PM\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2x-y & 3x-2y \\ 2z-t & 3z-2t \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2x+3z & 2y+3t \\ -x-2z & -y-2t \end{pmatrix}\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 4x-y+3z = 0 \\ 3x+3t = 0 \\ -x-t = 0 \\ -y+3z-4t = 0 \end{cases}\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -y+3z-4t = 0 \\ x = -t \\ -y+3z-4t = 0 \end{cases}\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = 3z-4t \\ x = -t \end{cases}\\
&\Leftrightarrow \quad M = \begin{pmatrix} -t & 3z-4t \\ z & t \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathscr{A}(P) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right).$$

Posons $\mathscr{B}' = \left(\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$. Par ce qui précède, $\mathscr{B}'$ engendre $\mathscr{A}(P)$. De plus, les deux matrices de $\mathscr{B}'$ ne sont pas colinéaires. Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{B}' = \left(\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) \text{ est une base de } \mathscr{A}(P).}$$

6. Posons $\mathscr{B}'' = \mathscr{B} \cup \mathscr{B}'$. Montrons que $\mathscr{B}''$ est libre. Soient $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$\begin{aligned}
& a\begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + bI_2 + c\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0_4 \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{cases} -4a + b - c = 0 \\ -3a - 4c + 3d = 0 \\ a + d = 0 \\ b + c = 0 \end{cases} \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{cases} -4a + b - c = 0 \\ -3a - 4c + 3d = 0 \\ a = -d \\ b = -c \end{cases} \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{cases} 4d - c - c = 0 \\ 3d - 4c + 3d = 0 \\ a = -d \\ b = -c \end{cases} \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{cases} c = 2d \\ c = \frac{3}{2}d \\ a = -d \\ b = -c \end{cases} \\
\Leftrightarrow \quad & a = b = c = d = 0.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathscr{B}''$ est libre.

Méthode 1, sans dimension. Montrons que $\mathscr{B}''$ est génératrice dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
M \in \text{Vect}\left(\mathscr{B}''\right) \quad & \Leftrightarrow \quad \exists\,(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ M = x\begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + yI_2 + z\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow \quad \exists\,(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4x + y - z & -3x - 4z + 3t \\ x + t & y + z \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow \quad \exists\,(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ (S)\ : \begin{cases} -4x + y - z = a \\ -3x - 4z + 3t = b \\ x + t = c \\ y + z = d \end{cases}.
\end{aligned}$$

Or,

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x+t=c \\ y+z=d \\ -4x+y-z=a \\ -3x-4z+3t=b \end{cases} \qquad \begin{matrix} L_1 \leftrightarrow L_3 \\ L_2 \leftrightarrow L_4 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+t=c \\ y+z=d \\ y-z+4t=a+4c \\ -4z+6t=b+3c \end{cases} \qquad \begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3+4L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4+3L_1 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+t=c \\ y+z=d \\ -2z+4t=a+4c-d \\ -4z+6t=b+3c \end{cases} \qquad L_3 \leftarrow L_3-L_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+t=c \\ y+z=d \\ -2z+4t=a+4c-d \\ -2t=-2a+b-5c+2d \end{cases} \qquad L_4 \leftarrow L_4-2L_3.$$

Notre système est échelonné avec un pivot à chaque ligne, il est donc compatible. Donc l'existence de $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ est toujours garanti pour tout $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. D'où

$$\operatorname{Vect}\left(\mathscr{B}''\right) = \mathscr{M}_2(\mathbb{R}).$$

Ainsi, $\mathscr{B}''$ est libre et génératrice dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et est donc une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Méthode 2, avec la dimension. On observe que $\operatorname{Card}(\mathscr{B}'') = 4 = \dim(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}))$. Or on a vu que $\mathscr{B}''$ est libre. Donc $\mathscr{B}''$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Résumons, nous avons donc

- $\mathscr{B}$ base de $\mathscr{S}(P)$,
- $\mathscr{B}'$ base de $\mathscr{A}(P)$,
- $\mathscr{B}'' = \mathscr{B} \cup \mathscr{B}'$ base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Conclusion, par le théorème de la base adaptée :

$$\boxed{\mathscr{S}(P) \text{ et } \mathscr{A}(P) \text{ sont supplémentaires dans } \mathscr{M}_2(\mathbb{R}).}$$

Partie 2 : Cas général

On suppose à nouveau $n \geqslant 2$ et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ quelconques.

7. Montrons que $\mathscr{S}(P) \cap \mathscr{A}(P) = \{0_n\}$. Soit $M \in \mathscr{S}(P) \cap \mathscr{A}(P)$. Alors,

$$\begin{aligned} \begin{cases} M \in \mathscr{S}(P) \\ M \in \mathscr{A}(P) \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} PM = MP \\ PM = -MP \end{cases} \\ &\Rightarrow MP = -MP \\ &\Rightarrow MP = 0_n \\ &\Rightarrow MPP^{-1} = 0_n P^{-1} \qquad \text{car } P \text{ est inversible} \\ &\Rightarrow M = 0_n. \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{S}(P) \cap \mathscr{A}(P) \subseteq \{0_n\}$. Or on a aussi $\{0_n\} \subseteq \mathscr{S}(P) \cap \mathscr{A}(P)$. Donc

$$\mathscr{S}(P) \cap \mathscr{A}(P) = \{0_n\}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{S}(P) \text{ et } \mathscr{A}(P) \text{ sont en somme directe.}}$$

On suppose que $P^2 = I_n$.

8. On a déjà vu à la question précédente que $\mathscr{S}(P)$ et $\mathscr{A}(P)$ sont en somme directe. Montrons donc que $\mathscr{S}(P) + \mathscr{A}(P) = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

   Analyse. Soit $M \in \mathscr{S}(P) + \mathscr{A}(P)$. Alors, il existe $(M_1, M_2) \in \mathscr{S}(P) \times \mathscr{A}(P)$ tel que $M = M_1 + M_2$. Puisque $M_1 \in \mathscr{S}(P)$, $PM_1 = M_1P$. De plus $M_2 \in \mathscr{A}(P)$ donc $PM_2 = -M_2P$. Dès lors, on obtient que

   $$PM = P(M_1 + M_2) = PM_1 + PM_2 = M_1P - M_2P.$$

   Ainsi, en multipliant par P à droite, on trouve que

   $$PMP = M_1P^2 - M_2P^2.$$

   Or $P^2 = I_n$. Donc $PMP = M_1 - M_2$. Ainsi,

   $$\begin{cases} PMP = M_1 - M_2 \\ M = M_1 + M_2 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} M_1 = \frac{M+PMP}{2} \\ M_2 = \frac{M-PMP}{2}. \end{cases}$$

   Ce qui redémontre à M fixé, l'unicité du couple (M_1, M_2) et donc le caractère direct de la somme.

   Synthèse. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Posons $M_1 = \frac{M+PMP}{2}$ et $M_2 = \frac{M-PMP}{2}$. Alors, on a

   - $M_1 + M_2 = \frac{M+PMP}{2} + \frac{M-PMP}{2} = M$.
   - De plus, $PM_1 = \frac{PM+P^2MP}{2} = \frac{PM+MP}{2}$ car $P^2 = I_n$. Et $M_1P = \frac{MP+PMP^2}{2} = \frac{MP+PM}{2}$. Donc on a bien $PM_1 = M_1P$ i.e. $M_1 \in \mathscr{S}(P)$.
   - Enfin, $PM_2 = \frac{PM-P^2MP}{2} = \frac{PM-MP}{2}$ car $P^2 = I_n$. Et $M_2P = \frac{MP-PMP^2}{2} = \frac{MP-PM}{2} = -\frac{PM-MP}{2} = -PM_2$. Donc $M_2 \in \mathscr{A}(P)$.

   Finalement, $M \in \mathscr{S}(P) + \mathscr{A}(P)$. Ceci étant vrai pour $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ quelconque, on en déduit que

   $$\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \subseteq \mathscr{S}(P) + \mathscr{A}(P).$$

   Or $\mathscr{S}(P) + \mathscr{A}(P) \subseteq \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. D'où,

   $$\mathscr{S}(P) + \mathscr{A}(P) = \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).$$

   Par la question précédente, on sait que $\mathscr{S}(P)$ et $\mathscr{A}(P)$ sont en somme directe. Conclusion,

   $$\boxed{\mathscr{S}(P) \text{ et } \mathscr{A}(P) \text{ sont supplémentaires dans } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).}$$

Problème III - Polynômes

Pour tout $\mu \in \mathbb{R}$, on pose $P_\mu = X^3 + \mu X^2 + \mu X + 1$.

Partie 1 : Révisions sur les racines complexes

1. (a) Si $\mu = 0$, on a $P_0 = X^3 + 1$. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$, alors,

$$P(\alpha) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha^3 + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha^3 = -1 = \mathrm{e}^{i\pi}.$$

On cherche donc les racines troisième de -1. On obtient alors,

$$\begin{aligned} P(\alpha) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \exists k \in [\![0;2]\!],\ \alpha = \sqrt[3]{1}\,\mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right)} \\ &\Leftrightarrow \quad \alpha = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}, \quad \text{OU} \quad \alpha = \mathrm{e}^{i\pi}, \quad \text{OU} \quad \alpha = \mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{3}}. \end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble des racines de P_0 est

$$\boxed{\mathscr{S}_0 = \left\{\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}},\ \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}},\ -1\right\}.}$$

(b) En notant $P = a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$, on a $a_3 = a_0 = 1$, $a_2 = a_1 = 0$. Puis

$$s = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}} + \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}} + (-1) = 2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - 1 = 1 - 1 = 0.$$

Or $-\frac{a_2}{a_3} = 0$ donc on a bien $s = -\frac{a_2}{a_3}$. D'autre part,

$$p = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}} \times \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}} \times (-1) = -1.$$

Or $(-1)^3\,\frac{a_0}{a_3} = -\frac{1}{1} = -1$. Donc on a bien $p = (-1)^3\,\frac{a_0}{a_3}$. Conclusion,

$$\boxed{\text{Ce que l'on a appris en cours est vrai.}}$$

(c) Par la question précédente, puisque le coefficient dominant de P_0 est 1, on trouve dans $\mathbb{C}[X]$ que

$$P_0 = 1 \times (X+1)\left(X - \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(X - \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}}\right).$$

En développant les racines complexes conjuguées, on obtient dans $\mathbb{R}[X]$:

$$P_0 = (X+1)\left(X^2 - 2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)X + 1\right) = (X+1)\left(X^2 - X + 1\right).$$

Conclusion, la factorisation de P_0 dans $\mathbb{R}[X]$ est donnée par

$$\boxed{P_0 = (X+1)\left(X^2 - X + 1\right).}$$

2. (a) Si $\mu = 1$, on obtient que $P_1 = X^3 + X^2 + X + 1$. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$, on sait alors que

$$\begin{aligned} P_1(\alpha) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \alpha \in \mathbb{U}_4 \setminus \{1\} \\ &\Leftrightarrow \quad \exists k \in [\![1;3]\!], \qquad \alpha = \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{4}} = \mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{2}} \\ &\Leftrightarrow \quad \alpha = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}} = i, \ \text{OU}\ \alpha = \mathrm{e}^{i\pi} = -1, \ \text{OU}\ \alpha = \mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{2}} = -i. \end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble des racines de P_1 est

$$\boxed{\mathscr{S}_1 = \{i,\ -1,\ -i\}.}$$

(b) Par la question précédente, et puisque P_1 est unitaire, on a dans $\mathbb{C}[X]$,

$$P_1 = 1 \times (X+1)(X-i)(X+i).$$

En développant les racines complexes conjuguées, on obtient dans $\mathbb{R}[X]$,

$$\boxed{P_1 = (X+1)\left(X^2+1\right).}$$

Partie 2 : Factorisation en degré 3

Soit $\mu \in \mathbb{R}$.

3. On a directement
$$P(-1) = -1 + \mu - \mu + 1 = 0.$$
Tellement facile que s'en est presque insultant. Conclusion,
$$\boxed{-1 \text{ est une racine de } P_\mu.}$$

4. On calcule :
$$P'_\mu = 3X^2 + 2\mu X + \mu.$$
On a alors
$$P'_\mu(-1) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad 3 - 2\mu + \mu = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \mu = 3.$$
Donc si $\mu \neq 3$, alors μ est une racine simple de P_μ. Si $\mu = 3$, alors $P'_3 = 3X^2 + 6X + 1$. Donc $P''_3 = 6X + 6$. Puis
$$P''_3(-1) = -6 + 6 = 0.$$
Enfin, $P'''_3 = 6$ et donc $P'''_3(-1) \neq 0$ *(bien sûr car on ne peut pas avoir de racine de multiplicité plus grande que* 3 *pour un polynôme de degré* 3*)*. Conclusion,
$$\boxed{\text{Pour } P_\mu, -1 \text{ est une racine de multiplicité } \begin{cases} \text{simple si } \mu \neq 3 \\ 3 \text{ si } \mu = 3. \end{cases}}$$

5. (a) Par l'algorithme de la division euclidienne,
$$\begin{array}{rrrr|l}
X^3 & +\mu X^2 & +\mu X & +1 & X^2+3X+2 \\
\hline
-(X^3 & +3X^2 & +2X) & & X+(\mu-3) \\
\hline
 & (\mu-3)X^2 & +(\mu-2)X & +1 & \\
 & -((\mu-3)X^2 & +3(\mu-3)X & +2(\mu-3)) & \\
\hline
 & & (7-2\mu)X & +7-2\mu &
\end{array}$$
Conclusion,
$$\boxed{P_\mu = X^3 + \mu X^2 + \mu X + 1 = \left(X^2+3X+2\right)(X + (\mu-3)) + (7-2\mu)(X+1).}$$

(b) Par la question précédente, on a
$$X^2 + 3X + 2 \text{ divise } P_\mu \qquad \Leftrightarrow \qquad (7-2\mu)(X+1) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \mu = \frac{7}{2}.$$
Conclusion,
$$\boxed{X^2 + 3X + 2 \text{ divise } P_\mu \qquad \Leftrightarrow \qquad \mu = \frac{7}{2}.}$$

6. On a vu déjà que -1 est une racine de P_μ. Donc $(X+1)$ factorise P_μ. Par l'algorithme de Horner :

	1	μ	μ	1
-1	1	$\mu - 1$	1	0

D'où $P_\mu = (X+1)\left(X^2 + (\mu-1)X + 1\right)$. Posons $Q_\mu = X^2 + (\mu-1)X + 1$ et soit Δ son discriminant associé. On a $\Delta = (\mu-1)^2 - 4 = (\mu-1-2)(\mu-1+2) = (\mu-3)(\mu+1)$. On obtient alors le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
Δ		$+$	0	$-$	0	$+$	

Premier cas, si $\mu \in]-\infty; -1] \cup [3; +\infty[$. Alors Q_μ admet deux racines réelles (éventuellement confondus) :

$$r_1 = \frac{1-\mu+\sqrt{(\mu-3)(\mu+1)}}{2} \qquad \text{et} \qquad r_2 = \frac{1-\mu-\sqrt{(\mu-3)(\mu+1)}}{2}.$$

Dans ce cas, P_μ étant unitaire,

$$\boxed{P_\mu = (X+1)\left(X - \frac{1-\mu+\sqrt{(\mu-3)(\mu+1)}}{2}\right)\left(X - \frac{1-\mu-\sqrt{(\mu-3)(\mu+1)}}{2}\right).}$$

Second cas, $\mu \in]-1; 3[$, alors $\Delta < 0$ et Q_μ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$. Dans ce cas,

$$\boxed{P_\mu = (X+1)\left(X^2 + (\mu-1)X + 1\right).}$$

7. Si $\mu = 1$, on a $\mu \in]-1; 3[$. Nous sommes donc dans le second cas et on retrouve bien que

$$\boxed{P_1 = (X+1)\left(X^2 + (1-1)X + 1\right) = (X+1)\left(X^2+1\right)}$$

ce qui était bien le résultat de la question 2.b.

8. Si $\mu = 3$, nous sommes dans le premier cas. Alors,

$$\begin{aligned} P_3 &= (X+1)\left(X - \frac{1-\mu+\sqrt{(\mu-3)(\mu+1)}}{2}\right)\left(X - \frac{1-\mu-\sqrt{(\mu-3)(\mu+1)}}{2}\right) \\ &= (X+1)\left(X - \frac{1-3+0}{2}\right)\left(X - \frac{1-3-0}{2}\right) \\ &= (X+1)(X+1)(X+1). \end{aligned}$$

Dans ce cas,

$$P_3 = (X+1)^3.$$

On retrouve alors bien dans ce cas que $\boxed{-1 \text{ est une racine de multiplicité 3 pour } P_3}$.

9. Par la question 6. on a directement

$$\boxed{P_\mu \text{ est scindé si et seulement si } \mu \in]-\infty; -1] \cup [3; +\infty[.}$$

Problème IV - Polynômes

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'ensemble

$$\mathscr{S} = \left\{ P \in \mathbb{R}[X] \;\middle|\; (X+1)\,P' = nP \right\}.$$

1. On a les points suivants :

   - $\mathscr{S} \subseteq \mathbb{R}[X]$ par définition.
   - Si $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$. Alors,
   $$(X+1)\,P' = 0_{\mathbb{R}[X]} = nP.$$
   Donc $0_{\mathbb{R}[X]} \in \mathscr{S}$.
   - Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(P, Q) \in \mathscr{S}^2$. Posons $R = \lambda\,P + \mu Q$. Montrons que $R \in \mathscr{S}$. On a
   $$\begin{aligned}(X+1)\,R' &= (X+1)\,(\lambda\,P + \mu Q)' \\ &= (X+1)\,\big(\lambda\,P' + \mu Q'\big) \\ &= \lambda\,(X+1)\,P' + \mu\,(X+1)\,Q' \\ &= \lambda\,nP + \mu nQ \qquad\qquad \text{car } P \in \mathscr{S} \text{ et } Q \in \mathscr{S} \\ &= n\,(\lambda\,P + \mu Q) \\ &= nR.\end{aligned}$$
   Donc $R \in \mathscr{S}$ et $\mathscr{S}$ est stable par combinaisons linéaires.

   Conclusion, $\mathscr{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ et donc

   $$\boxed{\mathscr{S} \text{ est un espace vectoriel.}}$$

Soit $P \in \mathscr{S}$, $P \neq 0_{\mathbb{R}[X]}$. On note $d = \deg(P)$.

2. Premier cas, $d = 0$. Alors, il existe $c \in \mathbb{R}$, tel que $P = c$. Dès lors, $P' = 0_{\mathbb{R}[X]}$ dans ce cas,

   $$(X+1)\,P' = nP \qquad \Leftrightarrow \qquad 0 = nc.$$

   Or $n \neq 0$ par hypothèse. Donc $c = 0$ et donc $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$ ce qui est exclu par hypothèse. Donc $d \neq 0$. Notons $a_d X^d$ le terme dominant de P. Alors celui de P' est $d a_d X^{d-1}$ (car $d \geqslant 1$) puis celui de $(X+1)\,P'$ est $d a_d X^d$. D'autre part, celui de nP est $n a_d X^d$. Par unicité des coefficients dominants, on obtient que

   $$d a_d = n a_d \qquad \Leftrightarrow \qquad d = n \qquad\qquad \text{car } a_d \neq 0 \text{ en tant que coefficient dominant.}$$

   Conclusion,
   $$\boxed{d = n.}$$

3. Puisque $(X+1)\,P' = nP$, en évaluant en -1, on a

   $$0 = nP(-1) \qquad \Leftrightarrow \qquad P(-1) = 0 \qquad\qquad \text{car } n \neq 0.$$

   Conclusion,
   $$\boxed{-1 \text{ est une racine de } P.}$$

4. Soit $a \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$. On suppose que a est une racine de P. On note m la multiplicité de a pour P.

(a) Par hypothèse, on a $P(a) = 0$. Donc en évaluant en a, on a

$$(a+1)\,P'(a) = nP(a) = 0.$$

Or $a \neq -1$, donc $P'(a) = 0$. Conclusion, la multiplicité de a est de au moins 2 :

$$\boxed{m \geqslant 2.}$$

(b) Par la formule de Leibniz, on a

$$\left((X+1)\,P'\right)^{(m-1)} = \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m-1}{k} (X+1)^{(k)} \left(P'\right)^{(m-1-k)}.$$

Or $(X+1)^0 = X+1$, $(X+1)' = 1$ et pour tout $k \geqslant 2$, $(X+1)^{(k)} = 0_{\mathbb{R}[X]}$. Comme $m \geqslant 2$, on obtient que

$$\begin{aligned}\left((X+1)\,P'\right)^{(m-1)} &= \binom{m-1}{0} (X+1) \left(P'\right)^{(m-1)} + \binom{m-1}{1} \left(P'\right)^{(m-1-1)}\\ &= (X+1)\,P^{(m)} + (m-1)\,P^{(m-1)}.\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\left((X+1)\,P'\right)^{(m-1)} = (X+1)\,P^{(m)} + (m-1)\,P^{(m-1)}.}$$

(c) Puisque $(X+1)\,P' = nP$. Par la question précédente, on a

$$(X+1)\,P^{(m)} + (m-1)\,P^{(m-1)} = \left((X+1)\,P'\right)^{(m-1)} = (nP)^{(m-1)} = nP^{(m-1)}.$$

Puisque m est la multiplicité de a pour P, on a $P^{(m-1)}(a) = 0$ et $P^{(m)}(a) \neq 0$. Donc en évaluant en a, on a

$$(a+1)\,P^{(m)}(a) + 0 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad P^{(m)}(a) = 0 \qquad\qquad \text{car } a \neq -1.$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{On obtient bien une conradiction.}}$$

5. Par la question précédente, on en déduit que P n'a pas d'autre racine que -1. Donc la forme factorisée dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$ est donnée par l'existence d'un $\lambda \in \mathbb{R}$ et d'un entier $k \in \mathbb{N}$ (la multiplicité de -1 pour être précis) tel que

$$P = \lambda\,(X+1)^k.$$

Or on a vu que $\deg(P) = n$. Donc $n = \deg\left(\lambda\,(X+1)^k\right) = k$ car $P \neq 0_{\mathbb{R}[X]}$ et donc $\lambda \neq 0$. Ainsi,

$$\boxed{P = \lambda\,(X+1)^n.}$$

6. Par ce qui précède, on a

$$\mathscr{S} \subseteq \{\,\lambda\,(X+1)^n \mid \lambda \in \mathbb{R}\,\} = \operatorname{Vect}\left((X+1)^n\right).$$

Procédons à la synthèse. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P = \lambda\,(X+1)^n$. Puisque $n \geqslant 1$, alors $P' = n\,(X+1)^{n-1}$. Donc

$$(X+1)\,P' = n\,\lambda\,(X+1)^n = nP.$$

D'où $\{\,\lambda\,(X+1)^n \mid \lambda \in \mathbb{R}\,\} \subseteq \mathscr{S}$. Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{S} = \{\,\lambda\,(X+1)^n \mid \lambda \in \mathbb{R}\,\} = \operatorname{Vect}\left((X+1)^n\right).}$$