Epreuve de mathématiques 7
2021-2022

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé
Durée : 4h

Encadrer les résultats et numéroter les copies

Problème 1 - Espaces vectoriels de polynômes

Soit $n \in \mathbb{N}$. Dans $\mathbb{R}_n[X]$, on pose pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, $Q_k = \binom{n}{k} X^{n-k} (1-X)^k$ et on introduit également les espaces vectoriels

$$F_k = \left\{ P \in \mathbb{R}_n[X] \;\middle|\; P(0) = P'(0) = \cdots = P^{(k)}(0) = 0 \right\}$$
$$G_k = \left\{ P \in \mathbb{R}_n[X] \;\middle|\; P(1) = P'(1) = \cdots = P^{(k)}(1) = 0 \right\}.$$

Partie 1 : En dimension 4

Pour $n = 3$, on considère les polynômes suivants :

$$P_0 = (X-1)(X-2)(X-3), \qquad P_1 = X(X-2)(X-3),$$
$$P_2 = X(X-1)(X-3), \qquad P_3 = X(X-1)(X-2).$$

Puis on pose

$$F = \mathrm{Vect}(P_2, P_3)$$
$$G = \left\{ P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3 \in \mathbb{R}_3[X] \;\middle|\; \begin{cases} 2a_0 + 3a_1 + 4a_2 + 5a_3 = 0 \\ a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 \end{cases} \right\}$$
$$H = \{ P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(0) = P(1) \}$$

On admet que F et G sont des espaces vectoriels.

1. Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Montrer que $\mathscr{B} = (P_0, P_1, P_2, P_3)$ forme une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
3. Déterminer la dimension de F.
4. Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_3[X]$.
5. Montrer que $F \subseteq H$.
6. Montrer que $F \neq H$.
7. En déduire que $\dim(H) = 3$.
8. Déterminer une base de G.
9. Montrer que $G = G_1$ *où G_1 est défini en début de problème.*
10. Déterminer une sous-famille de $(Q_k)_{k \in [\![0;3]\!]}$ qui soit une base de G.
11. Déterminer une base de $H \cap G$ et préciser sa dimension.
12. En déduire $H + G$.

Partie 2 : En dimension quelconque

On suppose à nouveau $n \geqslant 1$ quelconque.

13. Soit $k \in [\![0;n-1]\!]$. Montrer que F_{n-k-1} et G_k sont en somme directe.
14. Soit $k \in [\![0;n-1]\!]$. Montrer que $\mathrm{Vect}(Q_{k+1}, \ldots, Q_n) \subseteq G_k$.

15. Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \lambda_i \, Q_i = 0_{\mathbb{R}[X]}$.
    (a) Soit $k \in [\![0; n]\!]$. On pose $R_k = \displaystyle\sum_{i=k}^{n} \lambda_i \, Q_i$. Calculer $Q_k^{(k)}(1)$ puis $R_k^{(k)}(1)$.
    (b) Démontrer que $\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0_{\mathbb{R}}$.
16. Montrer que $\mathscr{B}_Q = (Q_0, \ldots, Q_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

On fixe $k \in [\![0; n-1]\!]$.

17. Déterminer une base et la dimension de G_k.
18. Montrer que $(Q_{k+1}, \ldots, Q_n)$ est une base de G_k.
19. Montrer que F_{n-k-1} et G_k sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_n[X]$.
20. Déterminer les coordonnées de X^n dans la base $\mathscr{B}_Q = (Q_0, \ldots, Q_n)$.
21. A l'aide de la formule du binôme de Newton, déterminer les coordonnées de 1 dans la base $\mathscr{B}_Q$.
22. (a) Pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, montrer que $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.
    (b) Simplifier $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} kQ_k$ et en déduire les coordonnées de X dans la base $\mathscr{B}$.

Partie 3 : petit bonus

On considère $H' = \{\, P \in \mathbb{R}[X] \mid P(0) = P(1) \,\}$ et $D = \mathrm{Vect}\,(X)$.

23. Montrer que $H' \oplus D = \mathbb{R}[X]$.

Problème 2 - Séries numériques

L'objectif de ce problème est de préciser le comportement asymptotique de $n!$:

$$\exists \gamma \in \mathbb{R}_+^*, \qquad n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \gamma n^n \, \mathrm{e}^{-n} \sqrt{n}.$$

Partie 1 : Harmonique un jour...

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$ et $b_n = a_n - \frac{1}{n}$.

1. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la somme partielle $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ et en déduire la nature de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n$.
2. Déterminer un équivalent simple de b_n.
3. En déduire la nature de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} b_n$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k$ en fonction de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
5. En déduire qu'il existe $C_1 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + C_1 + o\,(1)\,.$$

Partie 2 : Somme de logarithmes

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \ln(n)$ et $U_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

6. Déterminer la nature de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et de $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} (-1)^n u_n$.
7. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Montrer que
$$n\ln(n) - n + 1 \leqslant U_n \leqslant (n+1)\ln(n+1) - n + 1 - 2\ln(2).$$
8. En déduire un équivalent simple de U_n quand $n \to +\infty$.

Partie 3 : Soyons plus précis

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, on pose $v_n = \int_{n-1}^{n} \ln(n) - \ln(t)\,\mathrm{d}t$ et $V_n = \sum_{k=2}^{n} v_k$.

9. Rappeler l'identité des accroissements finis.
10. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Montrer que pour tout $t \in [n-1; n]$,
$$\frac{n-t}{n} \leqslant \ln(n) - \ln(t) \leqslant \frac{n-t}{n-1}.$$
11. En déduire que pour tout $n \geqslant 2$,
$$\frac{1}{2n} \leqslant v_n \leqslant \frac{1}{2(n-1)}.$$
12. Déterminer la nature de $(V_n)_{n\geqslant 2}$.
13. Montrer que $\sum_{n\geqslant 2} \left(v_n - \frac{1}{2n}\right)$ converge. On note S sa somme totale.
14. Peut-on en déduire la nature de $\sum_{n\geqslant 2} \cos(n)\left(v_n - \frac{1}{2n}\right)$?
15. Montrer qu'il existe $C_2 \in \mathbb{R}$ que l'on exprimera en fonction de C_1 et S telle que
$$V_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{\ln(n)}{2} + C_2 + o(1).$$
16. A l'aide de la définition de $(v_n)_{n\geqslant 2}$, montrer que
$$\forall n \geqslant 2, \qquad V_n = U_n - n\ln(n) + n - 1.$$
17. En déduire qu'il existe $C_3 \in \mathbb{R}$ tel que
$$U_n \underset{n\to+\infty}{=} n\ln(n) - n + \frac{\ln(n)}{2} + C_3 + o(1).$$

Partie 4 : Il est temps de conclure

18. Soient $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites numériques. Montrer que l'implication suivante est FAUSSE en général :
$$\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \beta_n \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{e}^{\alpha_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{\beta_n}.$$
19. Montrer que
$$\exists \gamma \in \mathbb{R}_+^*, \qquad n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \gamma n^n \,\mathrm{e}^{-n}\sqrt{n}.$$