Commentaires du DS7
Espaces vectoriels et séries numériques

Problème I - Espaces vectoriels de polynômes

Partie 1 : En dimension 4

1. Bien dans l'ensemble. Il est vital d'avoir eu tous les points ici.

2. Je vous l'ai dit, beaucoup trop d'opérations élémentaires alors que c'était beaucoup plus simple en passant par la définition du caractère libre. Ne pas confondre $\sim$ et $=$ sur les familles, quand vous faites des opérations élémentaires, les familles ne sont pas égales.

3. Là aussi pas mal de problème de rédaction. Parler du fait que les opérations élémentaires ne modifient pas le caractère libre et générateur lorsque vous donnez des égalités sur les espaces engendrés. Cela n'a pas de sens de parler du caractère libre si vous regardez $F = \text{Vect}(\dots) = \text{Vect}(\dots)$. Attention à ne pas confondre $R_3[X]$ et R^4. Ecrire $F = \text{Vect}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}, \dots\right)$ était hors sujet. De même $F = \text{Vect}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ -3X \\ -4X^2 \\ X^3 \end{bmatrix}, \dots\right)$ est à bannir. J'ai vu aussi « une sous-famille d'une base est une base » ce qui est faux sauf si la sous-famille est la famille entière.

4. De même, sur cette question, du bon et beaucoup de moins bon à cause d'un manque de rigueur sur les notions et la rédaction. Par exemple dire $\mathscr{B}_F$ base de F, poser $\mathscr{B}_G = \dots$, poser $G = \text{Vect}(\mathscr{B}_G)$ puis dire que $\mathscr{B}_F \cup \mathscr{B}_G$ base de E donc $F \oplus G = E$ ne suffit pas. Il faut d'une part citer le théorème de la base adaptée et il faut justifier que $\mathscr{B}_G$ est une base de G. D'accord cela n'est pas difficile mais il faut le rédiger. Plus inquiétant, j'ai vu aussi $\mathscr{B}_F \cup \mathscr{B}_G = \text{Vect}(\dots) = \dots = \mathbb{R}_3[X]$.

5. Vous voyez bien souvent que P_2 et P_3 sont dans H mais vous avez du mal à justifier l'implication $F \subseteq H$.

6. Bon bon on pouvait passer par la dimension de H mais c'était un peu triché (mais validé lorsque c'est bien fait). Certains ont bien compris ce qu'il était attendu cependant.

7. Même remarque.

8. Attention à la rédaction. Ecrire

$$G = \left\{ P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \in \mathbb{R}_3[X] \;\middle|\; \begin{cases} 2a_0 + 3a_1 + 4a_2 + 5a_3 = 0 \\ a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 \end{cases} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ 2a_0 + 3a_1 + 4a_2 + 5a_3 = 0 \end{cases} \qquad L_1 \leftrightarrow L_2$$

est très brouillon !

9. Question généreusement dotée car il faut démontrer l'égalité et non juste une inclusion. Vous l'avez vu mais vous n'avez pas toujours su conclure.

10. Non traitée mais pas si dure pourtant, à retravailler avec le corrigé.

11. Plutôt bien.

12. Par la formule de Grassmann. Quelques bonnes réponses.

Partie 2 : En dimension quelconque

13. Attention F_k est bien l'ensemble des polynômes ayant 0 comme racine de multiplicité AU MOINS $k+1$ et non juste k ! Sans cela vous ne pouviez pas aborder correctement cette partie. Deux trois belles réponses seulement.

A part la question 16 ou 22(a) parfois, cette partie n'a pas été abordée sinon. Certains se sont essayés à la question 15 (a) mais sans succès et plutôt avec des confusions. Question pas très facile mais qu'il faut savoir faire...

Partie 3 : petit bonus

Non traitée (ou non correctement).

Problème II - Séries numériques

Partie 1 : Harmonique un jour...

Un début gentil et généreusement doté pour récompensé ceux qui ont appris leur cours.

1. Il fallait reconnaître une somme télescopique sans aller trop vite dans son calcul. En effet, écrire $\sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln(k) = \ln(n+1) - \ln(1)$ c'est bien écrire directement $\sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln(k) = \ln(n+1)$ c'est moins bien. Des confusions sur la nature, oui $\ln(n+1)$ tend vers $+\infty$, oui la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n$ diverge mais non elle ne diverge pas grossièrement pour autant car $a_k = \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$ tend bien vers 0 quand $k \to +\infty$.

2. Facile, bien pour la majorité. Il est vitale de savoir faire cette question.

3. Bien dans l'ensemble... Sauf l'oubli de la POSITIVITE ! (ou ici la négativité).

4. J'ai mis trop de points sur cette question. Tant pis c'est cadeau.

5. Rarement bien rédigée. Plusieurs m'ont écrit $\sum_{k=1}^{n} b_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, $\ln(n+1) \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + o(1)$ et $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} b_k + \ln(n+1)$ donc par passage à la limite ont obtient le résultat. Ce n'est pas un passage à la limite. Regardez bien la rédaction du corrigé.

Partie 2 : Somme de logarithmes

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \ln(n)$ et $U_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$.

6. Assez bien pour le U_n encore que cela ne semble pas évident pour tout le monde. Beaucoup n'ont pas traité le $(-1)^n u_n$ et trop ont invoqué une divergence absolue, ce qui n'a aucun intérêt !! Cf évidemment le contre-exemple de la série harmonique alternée $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{n}$.

7. Beaucoup trop de forçages ! Vous oubliez de citer toutes les hypothèses du théorème ou de citer le théorème de comparaison série-intégrale. Vous parachutez souvent :

$$\int_1^n \ln(t)\,\mathrm{d}t \leqslant U_n \leqslant \int_2^{n+1} \ln(t)\,\mathrm{d}t.$$

alors que l'encadrement ne fonctionne pas si vous faîtes démarrer la somme à 1 !!! Cela implique que vous avez juste parachuté le résultat pour obtenir le résultat annoncé par l'énoncé sans réflechir vraiment à ce que vous écrivez, ce n'est pas très scientifique... Moins grave pour ceux qui ont bien écrit la somme à 2, justifiez pourquoi/comment vous revenez à une somme à 1. Plusieurs belles réponses cependant.

8. Pas très dure et pourtant pas si souvent traitée. Beaucoup de parachutage $\ln(n+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$ ce qui ressemble méchamment à une composée d'équivalents !

Partie 3 : Soyons plus précis

9. Sans commentaire sinon je sens que je ne vais pas rester poli...

10. Non réussie à retravailler avec le corrigé. J'ai vu du « c'est vrai en $t = n$ et en $t = n - 1$ » donc par monotonie c'est vrai sur $[\![n-1; n]\!]$. N'inventez pas de théorème (surtout quand il sont faux).

11. Assez bien dans l'ensemble n'hésitez pas à invoquer la croissance de l'intégrale.

12. POSITIVITE ! ! ! ! ! ! ! ! Ah et aussi ne jamais écrire $v_n \geqslant \frac{1}{2n}$ donc $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} v_n \geqslant \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{2n}$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{2n}$ diverge donc $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} v_n$ diverge. Avez-vous lu votre cours et l'anti-proposition III.3 ? ?

13. Un seul commentaire : POSITIVITE ! Non un autre aussi, si vous passez à l'équivalent sur $\frac{1}{2(n^2-n)}$ justifiez bien l'utilisation du théorème sur les équivalents des séries à termes positifs.

14. Petit piège de la formulation de la question : oui bien sûr que l'on peut en déduire sa nature ! $CVA \Rightarrow CV$.

15. On ne somme pas les équivalents : $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$ n'implique pas $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$!

16. Assez peu réussie, il fallait l'aborder correctement.

17. Quelques bonnes réponses.

Partie 4 : Il est temps de conclure

Non traitée/réussie.