Corrigé du Devoir Surveillé 6
Suites numériques, polynômes, espaces vectoriels

Problème I - Espaces vectoriels de polynômes

Soit $n \in \mathbb{N}$. Dans $\mathbb{R}_n[X]$, on pose pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, $Q_k = \binom{n}{k} X^{n-k}(1-X)^k$ et on introduit également les espaces vectoriels

$$F_k = \left\{ P \in \mathbb{R}_n[X] \;\middle|\; P(0) = P'(0) = \cdots = P^{(k)}(0) = 0 \right\}$$
$$G_k = \left\{ P \in \mathbb{R}_n[X] \;\middle|\; P(1) = P'(1) = \cdots = P^{(k)}(1) = 0 \right\}.$$

Partie 1 : En dimension 4

Pour $n = 3$, on considère les polynômes suivants :

$$P_0 = (X-1)(X-2)(X-3), \qquad P_1 = X(X-2)(X-3),$$
$$P_2 = X(X-1)(X-3), \qquad P_3 = X(X-1)(X-2).$$

Puis on pose

$$F = \mathrm{Vect}(P_2, P_3)$$
$$G = \left\{ P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \in \mathbb{R}_3[X] \;\middle|\; \begin{cases} 2a_0 + 3a_1 + 4a_2 + 5a_3 = 0 \\ a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 \end{cases} \right\}$$
$$H = \{ P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(0) = P(1) \}$$

On admet que F et G sont des espaces vectoriels.

1. On observe les points suivants :
   - $H \subseteq \mathbb{R}_3[X]$ par définition.
   - Si $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$. Alors, $P(0) = 0_{\mathbb{R}} = P(1)$. Donc $0_{\mathbb{R}[X]} \in H$.
   - Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $(P, Q) \in H^2$. Posons $R = \lambda P + \mu Q$. Alors,
   $$R(0) = \lambda P(0) + \mu Q(0) = \lambda P(1) + \mu R(1) \qquad \text{car } P \in H \text{ et } Q \in H.$$
   Donc $R(0) = R(1)$ i.e. $R \in H$ et H est stable par combinaisons linéaires.

   Conclusion,
   $$\boxed{H \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}_3[X].}$$

2. Montrons que $\mathscr{B} = (P_0, P_1, P_2, P_3)$ est libre. Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^4$ tel que $\lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = 0_{\mathbb{R}_3[X]}$. Alors,
   $$\lambda_0 (X-1)(X-2)(X-3) + \lambda_1 X(X-2)(X-3) + \lambda_2 X(X-1)(X-3) + \lambda_3 X(X-1)(X-2) = 0_{\mathbb{R}[X]}.$$
   En particulier, en évaluant en 0,
   $$\lambda_0(-6) = 0_{\mathbb{R}} \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_0 = 0_{\mathbb{R}}.$$

Donc $\lambda_1 X(X-2)(X-3)+\lambda_2 X(X-1)(X-3)+\lambda_3 X(X-1)(X-2)=0_{\mathbb{R}[X]}$. En évaluant en 1,

$$\lambda_1 (1)(-1)(-2)=0_{\mathbb{R}} \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_1 = 0_{\mathbb{R}}.$$

Donc $\lambda_2 X(X-1)(X-3)+\lambda_3 X(X-1)(X-2)=0_{\mathbb{R}[X]}$. On évalue en 2,

$$\lambda_2 (2)(1)(-1)\, 0_{\mathbb{R}} \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_2 = 0_{\mathbb{R}}.$$

Donc $\lambda_3 X(X-1)(X-2)=0_{\mathbb{R}[X]}$ i.e. $\lambda_3 = 0_{\mathbb{R}}$. Ainsi,

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0_{\mathbb{R}}.$$

Donc $\mathscr{B}$ est une famille libre de $\mathbb{R}_3[X]$ (tous les polynômes de $\mathscr{B}$ ont bien un degré inférieur ou égal à 3). De plus,

$$\mathrm{Card}(\mathscr{B}) = 4 = \dim(\mathbb{R}_3[X]).$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{B} \text{ est une base de } \mathbb{R}_3[X].}$$

3. Puisque (P_2, P_3) est une sous-famille de $\mathscr{B}$ et que $\mathscr{B}$ est libre d'après la question précédente, on en déduit que (P_2, P_3) est libre. Or par définition de F, (P_2, P_3) engendre F. Donc (P_2, P_3) est une base de F. Conclusion,

$$\boxed{\dim(F) = \mathrm{Card}((P_2, P_3)) = 2.}$$

4. Posons $\mathscr{B}_F = (P_2, P_3)$. Par la question précédente, $\mathscr{B}_F$ est une base de F. Posons $\mathscr{B}'_F = (P_0, P_1)$ et $F' = \mathrm{Vect}(\mathscr{B}_G)$. En tant que sous-famille de $\mathscr{B}$ qui est libre, la famille $\mathscr{B}'_F$ est libre. De plus par construction de F', $\mathscr{B}'_F$ engendre F'. Donc $\mathscr{B}'_F$ est une base de F'. Enfin, on sait par la question 2. que $\mathscr{B} = \mathscr{B}'_F \cup \mathscr{B}_F$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$. Donc par le théorème de la base adaptée :

$$\boxed{F' = \mathrm{Vect}(P_0, P_1) \text{ est un supplémentaire de } F \text{ dans } \mathbb{R}_3[X].}$$

5. *Rédaction 1.* Soit $P \in F$. Alors, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $P = \lambda P_2 + \mu P_3$ i.e.

$$P = \lambda X(X-1)(X-3), +\mu X(X-1)(X-2).$$

Donc

$$P(0) = \lambda \times 0 + \mu \times 0 = 0_{\mathbb{R}} \qquad \text{et} \qquad P(1) = \lambda \times 0 + \mu \times 0 = 0_{\mathbb{R}}.$$

Donc $P \in H$. Ceci étant vrai pour $P \in F$ quelconque, on en déduit que

$$\boxed{F \subseteq H.}$$

Rédaction 2. On note que $P_2(0) = 0 = P_2(1)$ et que $P_3(0) = P_3(1)$. Donc $P_2 \in H$ et $P_3 \in H$. Or $\mathrm{Vect}(P_2, P_3)$ est le plus petit espace vectoriel contenant P_2 et P_3. Conclusion,

$$\boxed{F = \mathrm{Vect}(P_2, P_3) \subseteq H.}$$

6. Montrons que $1_{\mathbb{R}[X]} \in H \setminus F$. Si $P = 1_{\mathbb{R}[X]}$. Alors, $P(0) = 1 = P(1)$. Donc $P \in H$. Supposons que $P \in F$. Alors, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$1_{\mathbb{R}[X]} = \lambda P_2 + \mu P_3 = \lambda X(X-1)(X-3) + \mu X(X-1)(X-2).$$

Alors, en évaluant en 0,

$$1 = 0 \text{ impossible.}$$

Donc $1_{\mathbb{R}[X]} \notin F$. Donc il existe un élément de H qui n'est pas dans F conclusion,

$$\boxed{F \neq H.}$$

7. D'après la question 5. $F \subseteq H$. Donc $\dim(F) \leqslant \dim(H)$. Supposons $\dim(H) = \dim(F)$. Puisque $F \subseteq H$, on en déduit que $F = H$ ce qui contredit la question précédente. Donc $\dim(H) > \dim(F)$. Par la question 3. $\dim(H) > 2$ i.e. $\dim(H) \geqslant 3$. Puisque $H \subseteq \mathbb{R}_3[X]$, on sait aussi que $\dim(H) \leqslant \dim(\mathbb{R}_3[X]) = 4$. Supposons que $\dim(H) = 4$. Alors, $H \subseteq \mathbb{R}_3[X]$ et $\dim(H) = 4 = \dim(\mathbb{R}_3[X])$. Dans ce cas, $H = \mathbb{R}_3[X]$. Montrons que cette assertion est fausse. Si $P = X$, alors on a bien $P \in \mathbb{R}_3[X]$ et pourtant $P(0) = 0 \neq 1 = P(1)$. Donc $P \notin H$. Donc $H \neq \mathbb{R}_3[X]$. Nécessairement, on en déduit que $\dim(H) \neq 4$. Donc $\dim(H) \leqslant 3$. Or $\dim(H) \geqslant 3$. Conclusion,

$$\boxed{\dim(H) = 3.}$$

8. On a les égalités ensemblistes suivantes :

$$\begin{aligned}
G &= \left\{ P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \in \mathbb{R}_3[X] \;\middle|\; \begin{cases} 2a_0 + 3a_1 + 4a_2 + 5a_3 = 0 \\ a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 \end{cases} \right\} \\
&= \left\{ P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \in \mathbb{R}_3[X] \;\middle|\; \begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ 2a_0 + 3a_1 + 4a_2 + 5a_3 = 0 \end{cases} \right\} & L_1 \leftrightarrow L_2 \\
&= \left\{ P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \in \mathbb{R}_3[X] \;\middle|\; \begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 0 \end{cases} \right\} & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\
&= \left\{ P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \in \mathbb{R}_3[X] \;\middle|\; \begin{cases} a_0 = -a_1 - a_2 - a_3 & = 2a_2 + 3a_3 - a_2 - a_3 \\ & = a_2 + 2a_3 \\ a_1 = -2a_2 - 3a_3 \end{cases} \right\} \\
&= \left\{ a_2 + 2a_3 + (-2a_2 - 3a_3)X + a_2X^2 + a_3X^3 \in \mathbb{R}_3[X] \;\middle|\; (a_2, a_3) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\
&= \operatorname{Vect}\left(X^2 - 2X + 1, X^3 - 3X + 2\right).
\end{aligned}$$

Posons $\mathscr{B}_G = \left(X^2 - 2X + 1, X^3 - 3X + 2\right)$. Alors $\mathscr{B}_G$ engendre G. De plus, la famille $\mathscr{B}_G$ est une famille de polynômes de degrés distincts donc $\mathscr{B}_G$ est libre. Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{B}_G = \left(X^2 - 2X + 1, X^3 - 3X + 2\right) \text{ est une base de } G.}$$

9. On note que $G_1 = \{ P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = P'(1) = 0 \}$. Donc $P \in G_1$ si et seulement si 1 est une racine de multiplicité au moins 2 de P i.e. $(X-1)^2$ divise P. Ainsi,

$$\begin{aligned}
G_1 &= \left\{ P \in \mathbb{R}_3[X] \;\middle|\; \exists Q \in \mathbb{R}_1[X],\ P = (X-1)^2 Q \right\} \\
&= \left\{ P \in \mathbb{R}_3[X] \;\middle|\; \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ P = (X-1)^2 (aX + b) \right\} \\
&= \operatorname{Vect}\left((X-1)^2, X(X-1)^2\right).
\end{aligned}$$

Posons $\mathscr{B}_{G_1} = \left((X-1)^2, X(X-1)^2\right)$. $\mathscr{B}_{G_1}$ engendre G_1 et ses deux polynômes sont de degrés distincts donc $\mathscr{B}_{G_1}$ est libre et est donc une base de G_1. Ainsi,

$$\dim(G_1) = \operatorname{Card}(\mathscr{B}_{G_1}) = 2.$$

Par la question précédente, $\dim(G) = \operatorname{Card}(\mathscr{B}_G) = 2$. Ainsi, on observe que

$$\dim(G) = \dim(G_1).$$

Montrons de plus que $G \subseteq G_1$. Posons $R_1 = X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$ et $R_2 = X^3 - 3X + 2$. Alors, on a

$$R_1(1) = 0, \qquad R_1'(1) = 2(1-1) = 0, \qquad R_2(1) = 1 - 3 + 2 = 0, \qquad R_2'(1) = 3 - 3 = 0.$$

Donc $R_1 \in G_1$ et $R_2 \in G_1$. Or l'espace engendré $\mathrm{Vect}\,(R_1, R_2)$ est le plus petit espace vectoriel contenant R_1 et R_2. Ainsi,

$$G = \mathrm{Vect}\,(\mathscr{B}_G) = \mathrm{Vect}\,(R_1, R_2) \subseteq G_1.$$

Par égalité des dimensions, on conclut que

$$\boxed{G = G_1.}$$

10. Calculons, on a

$$\begin{aligned} Q_0 &= \binom{3}{0} X^{3-0} (1-X)^0 = X^3, \\ Q_1 &= 3X^2 (1-X), \\ Q_2 &= 3X (1-X)^2, \\ Q_3 &= 4X (1-X)^3. \end{aligned}$$

On observe que 1 est racine de multiplicité k de Q_k donc de multiplicité au moins deux de Q_2, Q_3. Dès lors $Q_2 \in G_1$ et $Q_3 \in G_1$. Or Q_2 et Q_3 sont de degrés distincts. Donc (Q_2, Q_3) est libre dans G_1. De plus

$$\mathrm{Card}\,(Q_2, Q_3) = 2 = \dim (G_1).$$

Donc (Q_2, Q_3) est une base de $G_1 = G$. Conclusion,

$$\boxed{(Q_2, Q_3) \text{ est une sous-famille de } (Q_k)_{k \in [\![0;3]\!]} \text{ et est une base de } G = G_1.}$$

11. Par ce qui précède, on a

$$G = G_1 = \left\{ P \in \mathbb{R}_3[X] \,\middle|\, P(1) = P'(1) = 0 \right\}.$$

Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$. On a donc

$$\begin{aligned} P \in H \cap G \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} P(0) = P(1) \\ P(1) = P'(1) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad P(0) = P(1) = P'(1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad X (X-1)^2 \text{ divise } P \\ &\Leftrightarrow \quad \exists\, \lambda \in \mathbb{R},\ P = \lambda\, X (X-1)^2 \qquad \text{par considération sur le degré.} \\ &\Leftrightarrow \quad P \in \mathrm{Vect}\left(X (X-1)^2\right). \end{aligned}$$

Donc

$$H \cap G = \mathrm{Vect}\left(X (X-1)^2\right).$$

Le polynôme $X(X-1)^2$ étant non nul, on en déduit qu'il forme une famille libre et génératrice de $H \cap G$. Conclusion,

$$\boxed{\left(X (X-1)^2\right) \text{ forme une base de } \mathbb{R}_3[X] \text{ et donc } \dim (H \cap G) = \mathrm{Card}\left(X (X-1)^2\right) = 1.}$$

12. Par les questions précédentes et la formule de Grassmann,

$$\dim (H + G) = \dim (H) + \dim (G) - \dim (H \cap G) = 3 + 2 - 1 = 4 = \dim (\mathbb{R}_3[X]).$$

Or H et G étant des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_3[X]$, $H + G$ est aussi un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$ et donc $H + G \subseteq \mathbb{R}_3[X]$. Par égalité des dimensions,

$$\boxed{H + G = \mathbb{R}_3[X].}$$

Partie 2 : En dimension quelconque

On suppose à nouveau $n \geqslant 1$ quelconque.

13. Soit $k \in [\![0; n-1]\!]$. Soit $P \in F_{n-k-1} \cap G_k$. Alors,

$$\begin{aligned} & \begin{cases} P(0) = P'(0) = \cdots = P^{(n-k-1)}(0) = 0 \\ P(1) = P'(1) = \cdots = P^{(k)}(0) = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \quad & \begin{cases} 0 \text{ est une racine de multiplicité au moins } n-k \\ 1 \text{ est une racine de multiplicité au moins } k+1 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc P admet au total $n+1$ racines comptées avec multiplicité. Or $\deg(P) \leqslant n < n+1$. Conclusion,

$$P = 0_{\mathbb{R}[X]}.$$

Ceci étant vrai pour $P \in F_{n-k-1} \cap G_k$ quelconque, on en déduit que $F_{n-k-1} \cap G_k \subseteq \{0_{\mathbb{R}[X]}\}$. Or $F_{n-k-1} \cap G_k$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ donc $\{0_{\mathbb{R}[X]}\} \subseteq F_{n-k-1} \cap G_k$. Conclusion,

$$\boxed{F_{n-k-1} \cap G_k = \{0_{\mathbb{R}[X]}\} \text{ i.e. } F_{n-k-1} \text{ et } G_k \text{ sont en somme directe.}}$$

14. Soit $k \in [\![0; n-1]\!]$. Soit $i \in [\![k+1; n]\!]$. On a

$$Q_i = \binom{n}{i} X^{n-i} (1-X)^i = (X-1)^{k+1} (-1)^k \binom{n}{i} X^{n-i} (1-X)^{i-k-1} \qquad \text{car } i \geqslant k+1$$

Donc $(X-1)^{k+1}$ divise Q_i et donc 1 est une racine de multiplicité au moins $k+1$ de Q_i. Ainsi,

$$Q_i(1) = Q_i'(1) = \cdots = Q_i^{(k)}(1) = 0.$$

Autrement dit, $\forall i \in [\![k+1; n]\!]$, $Q_i \in G_k$. Or G_k est un espace vectoriel et $\mathrm{Vect}(Q_{k+1}, \ldots, Q_n)$ est le plus petit espace vectoriel contenant les Q_i. Conclusion,

$$\boxed{\mathrm{Vect}(Q_{k+1}, \ldots, Q_n) \subseteq G_k.}$$

15. Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \lambda_i Q_i = 0_{\mathbb{R}[X]}$.

   (a) Soit $k \in [\![0; n]\!]$. On pose $R_k = \displaystyle\sum_{i=k}^{n} \lambda_i Q_i$.

   Par la formule de Leibniz,

$$\begin{aligned} Q_k^{(k)} &= \binom{n}{k} (-1)^k \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(X^{n-k}\right)^{(j)} \left((X-1)^{(k)}\right)^{(k-j)} \\ &= \binom{n}{k} (-1)^k \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \frac{(n-k)!}{(n-k-j)!} X^{n-k-j} \binom{k!}{(j)!} (X-1)^j . \end{aligned}$$

   Notamment, en évaluant en 1 tous les termes s'annulent sauf celui d'indice $j=0$,

$$Q_k^{(k)}(1) = \binom{n}{k} (-1)^k \binom{k}{0} \frac{(n-k)!}{(n-k)!} 1^{n-k} \binom{k!}{0!} + 0 = \binom{n}{k} (-1)^k .$$

Conclusion,

$$\boxed{Q_k^{(k)}(1) = \binom{n}{k}(-1)^k.}$$

De plus, par linéarité de la dérivation et de l'évaluation, on a

$$R_k^{(k)}(1) = \sum_{i=k}^{n} \lambda_i \, Q_i^{(k)}(1).$$

On a vu à la question précédente que pour tout $i \geqslant k+1$, 1 est une racine de multiplicité au moins $k+1$ de Q_i et donc en particulier, pour tout $i \geqslant k+1$, $Q_i^{(k)}(1) = 0$. Ainsi,

$$\boxed{R_k^{(k)}(1) = \lambda_k \, Q_k^{(k)}(1) = \lambda_k \binom{n}{k}(-1)^k.}$$

(b) Posons pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, $\mathscr{P}(k)$: « $\lambda_0 = \cdots = \lambda_{k-1} = 0_{\mathbb{R}}$ et $R_k = 0_{\mathbb{R}[X]}$ ». Procédons par récurrence.
Initialisation. Si $k=0$, alors par hypothèse de la question, on a $R_0 = 0_{\mathbb{R}[X]}$ donc en particulier $R_0(1) = 0_{\mathbb{R}}$. Or par ce qui précède, $R_0(1) = R_0^{(0)}(1) = \lambda_0 \binom{n}{0}(-1)^0 = \lambda_0$. Donc $\lambda_0 = 0$. On en déduit donc aussi que $0_{\mathbb{R}[X]} = R_0 = \lambda_0 \, Q_0 + R_1 = R_1$. Donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.
Hérédité. Soit $k \in [\![1;n-1]\!]$. Supposons $\mathscr{P}(k)$ vraie. Alors pour tout $i \leqslant k-1$, $\lambda_i = 0_{\mathbb{R}}$ et $R_k = 0_{\mathbb{R}[X]}$. Donc $R_k^{(k)} = 0_{\mathbb{R}[X]}$ et donc $R_k^{(k)}(1) = 0_{\mathbb{R}}$. Dès lors par la question précédente,

$$\lambda_k \binom{n}{k}(-1)^k = 0_{\mathbb{R}} \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda_k = 0_{\mathbb{R}}.$$

Donc $\lambda_0 = \cdots = \lambda_k = 0_{\mathbb{R}}$. Or $R_k = 0_{\mathbb{R}[X]}$ donc

$$\lambda_k \, Q_k + R_{k+1} = 0_{\mathbb{R}[X]} \qquad \Rightarrow \qquad R_{k+1} = 0_{\mathbb{R}[X]}.$$

Ainsi, $\lambda_0 = \cdots = \lambda_k = 0_{\mathbb{R}}$ et $R_{k+1} = 0_{\mathbb{R}[X]}$. Donc $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.
Conclusion, pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, $\mathscr{P}(k)$ est vraie. Notamment, $\mathscr{P}(n)$ i.e. $\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0_{\mathbb{R}}$ et $0_{\mathbb{R}[X]} = R_n = \lambda_n \, Q_n = \lambda_n (1-X)^n$. Donc $\lambda_n = 0_{\mathbb{R}}$. Conclusion,

$$\boxed{\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0_{\mathbb{R}}.}$$

16. Par la question précédente, $(Q_0, \ldots, Q_n)$ est libre. Or $\operatorname{Card}(\mathscr{B}_Q) = n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$. Conclusion,

$$\boxed{(Q_0, \ldots, Q_n) \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[X].}$$

On fixe $k \in [\![0;n-1]\!]$.

17. On a les égalités ensemblistes suivantes :

$$\begin{aligned}
G_k &= \{ P \in \mathbb{R}_n[X] \mid 1 \text{ est une racine de multiplicité au moins } k+1 \} \\
&= \left\{ P \in \mathbb{R}_n[X] \;\middle|\; (X-1)^{k+1} \text{ divise } P \right\} \\
&= \left\{ P \in \mathbb{R}_n[X] \;\middle|\; \exists Q \in \mathbb{R}_{n-k}[X],\ P = (X-1)^{k+1} Q \right\} \\
&= \left\{ (X-1)^{k+1} \left(a_0 + \cdots + a_{n-k} X^{n-k}\right) \;\middle|\; (a_0, \ldots, a_{n-k}) \in \mathbb{R}^{n-k+1} \right\} \\
&= \operatorname{Vect}\left((X-1)^{k+1}, X(X-1)^{k+1}, \ldots, X^{n-k-1}(X-1)^{k+1} \right).
\end{aligned}$$

Posons $\mathscr{B}_{G_k} = \left((X-1)^{k+1}, X(X-1)^{k+1}, \ldots, X^{n-k-1}(X-1)^{k+1} \right)$. Par ce qui précède $\mathscr{B}_{G_k}$ engendre G_k. De plus cette famille est libre en tant que famille de polynômes de degrés distincts. Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{B}_{G_k} \text{ est une base de } G_k \text{ et } \dim(G_k) = \operatorname{Card}(\mathscr{B}_{G_k}) = n-k.}$$

18. On a vu à la question 14. que $\operatorname{Vect}(Q_{k+1},\dots,Q_n) \subseteq G_k$. Donc $(Q_{k+1},\dots,Q_n)$ est une famille de vecteurs de G_k. De plus,
$$\operatorname{Card}(Q_{k+1},\dots,Q_n) = n-k = \dim(G_k).$$
Enfin, en tant que sous-famille de $\mathscr{B}_Q$, $(Q_{k+1},\dots,Q_n)$ est libre. Conclusion,
$$\boxed{(Q_{k+1},\dots,Q_n) \text{ est une base de } G_k.}$$

19. De la même façon que pour G_k, on observe que
$$\begin{aligned} F_{n-k-1} &= \{\, P \in \mathbb{R}_n[X] \mid\ 0 \text{ est une racine de multiplicité au moins } n-k \,\} \\ &= \operatorname{Vect}\left(X^{n-k}, X^{n-k+1},\dots,X^n\right). \end{aligned}$$
Donc $\left(X^{n-k}, X^{n-k+1},\dots,X^n\right)$ engendre F_{n-k-1} et est libre en tant que famille de polynômes de degrés distincts donc est une base de F_{n-k-1}. Ainsi,
$$\dim(F_{n-k-1}) = \operatorname{Card}\left(X^{n-k}, X^{n-k+1},\dots,X^n\right) = n-(n-k)+1 = k+1.$$
Dès lors, on obtient que
$$\dim(F_{n-k-1}) + \dim(G_k) = k+1+n-k = n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X]).$$
De plus, par la question 13. F_{n-k+1} et G_k sont en somme directe. Conclusion,
$$\boxed{F_{n-k+1} \text{ et } G_k \text{ sont supplémentaires dans } \mathbb{R}_n[X].}$$

20. On a $Q_0 = \binom{n}{0} X^n (1-X)^0 = X^n$. Donc directement $X^n = 1\times Q_0 + 0\times Q_1 + \cdots + 0\times Q_n$. Conclusion,
$$\boxed{\text{les coordonnées de } X^n \text{ dans } (Q_0,\dots,Q_n) \text{ sont } (1,0,\dots,0).}$$

21. Par la formule du binôme de Newton, on a
$$\sum_{k=0}^{n} Q_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^{n-k}(1-X)^k = (X+1-X)^n = 1^n = 1.$$
Conclusion,
$$\boxed{\text{les coordonnées de } 1 \text{ dans } (Q_0,\dots,Q_n) \text{ sont } (1,1,\dots,1).}$$

22. (a) Soit $k \in [\![1;n]\!]$, on a
$$k\binom{n}{k} = k\frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} = n\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-1-(k-1))!} = n\binom{n-1}{k-1}.$$
Conclusion,
$$\boxed{\forall k \in [\![1;n]\!], \qquad k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.}$$

(b) On a les égalités entre polynômes suivantes :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} kQ_k &= \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} X^{n-k}(1-X)^k \\
&= \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} X^{n-k}(1-X)^k \\
&= \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} X^{n-k}(1-X)^k && \text{par la question précédente et } k \geqslant 1 \\
&= n\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} X^{n-k-1}(1-X)^{k+1} && \text{en posant } \tilde{k} = k-1 \\
&= n(1-X)\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} X^{n-k-1}(1-X)^{k} \\
&= n(1-X)(X+1-X)^{n-1} && \text{par la formule du binôme de Newton} \\
&= n - nX.
\end{aligned}$$

Ainsi, puisque $n \geqslant 1$,

$$X = 1 - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} kQ_k.$$

Par la question 21.

$$X = \sum_{k=0}^{n} Q_k - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} kQ_k = \sum_{k=0}^{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)Q_k.$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{les coordonnées de } X \text{ dans } (Q_0,\dots,Q_n) \text{ sont } \left(1, \frac{n-1}{n}, \frac{n-2}{n}, \dots, \frac{1}{n}, 0\right).}$$

Vérification : pour $n = 3$, $Q_0 = X^3$, $Q_1 = 3X^2(1-X) = 3X^2 - 3X^3$, $Q_2 = 3X(1-X)^2 = 3X - 6X^2 + 3X^3$ *et* $Q_3 = (1-X)^3 = 1 - 3X + 3X^2 + X^3$. *Alors,*

$$1 \times Q_0 + \frac{2}{3} \times Q_1 + \frac{1}{3} \times Q_2 + 0 \times Q_3 = X^3 + 2X^2 - 2X^3 + X - 2X^2 + X^3 = X. \textit{ OK !}$$

Partie 3 : petit bonus

On considère $H' = \{ P \in \mathbb{R}[X] \mid P(0) = P(1) \}$.

23. Procédons par analyse/synthèse. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

Analyse. Supposons que $P \in H' + \mathbb{R}_0[X]$. Alors, il existe $Q \in H'$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $P = Q + \lambda X$. Donc $Q = P - \lambda X$. Puisque $Q \in H'$, on a

$$\begin{aligned}
Q(0) = Q(1) \quad &\Leftrightarrow \quad P(0) - \lambda \times 0 = P(1) - \lambda \times 1 \\
&\Leftrightarrow \quad P(0) = P(1) - \lambda \\
&\Leftrightarrow \quad \lambda = P(1) - P(0).
\end{aligned}$$

Donc λ est fixée de façon unique. Puis $Q = P - \lambda X$ l'est également. Ainsi, si la décomposition de P existe, elle est nécessairement unique, ce qui démontre que H' et D sont supplémentaires.

Synthèse. Posons $\lambda = P(1) - P(0)$ et $Q = P - \lambda X$. Alors, on observe les points suivants.

- $Q + \lambda X = P - \lambda X + \lambda X = P$.

- $\lambda X \in \mathrm{Vect}(X) = D$ ok.
- $Q(0) = P(0)$ et $Q(1) = P(1) - \lambda = P(1) - (P(1) - P(0)) = P(0)$. Donc $Q(0) = Q(1)$ et donc $Q \in H'$.

D'où, $P \in H' + D$. Ceci étant vrai pour P quelconque dans $\mathbb{R}[X]$, on obtient que $\mathbb{R}[X] = H' + D$ et l'existence de la décomposition pour tout polynôme.

On a donc démontré l'existence et l'unicité de la décomposition pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$. Conclusion,

$$\boxed{H' \oplus D = \mathbb{R}[X].}$$

Problème II - Séries numériques

L'objectif de ce problème est de préciser le comportement asymptotique de $n!$:

$$\exists \gamma \in \mathbb{R}_+^*, \qquad n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \gamma n^n \,\mathrm{e}^{-n} \sqrt{n}.$$

Partie 1 : Harmonique un jour...

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$ et $b_n = a_n - \frac{1}{n}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \left[\ln(k+1) - \ln(k)\right].$$

On reconnaît une somme télescopique :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1).$$

Or $\ln(n+1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \sum_{k=1}^{n} a_k = \ln(n+1) \qquad \text{et} \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n \text{ diverge.}}$$

2. On a les égalités asymptotiques suivantes :

$$\begin{aligned} b_n = a_n - \frac{1}{n} &= \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \frac{1}{n} \\ &= \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \\ &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \frac{1}{n} \\ &\underset{n\to+\infty}{=} -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}.}$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $-\frac{1}{2n^2} < 0$. Donc par la question précédente, $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} b_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{-1}{2n^2}$ sont de même nature. Or $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{-1}{2n^2}$ converge en tant que série de Riemann d'exposant $\alpha = 2 > 1$. Conclusion,

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}^*} b_n \text{ converge.}}$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par définition,

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n} \left(a_k - \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Donc par la question 1.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{k=1}^{n} b_k = \ln(n+1) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.}$$

5. Par la question 3. $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} b_n$ converge. Notons $C_1 = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ sa somme totale i.e. sa limite, alors :

$$\sum_{k=1}^{n} b_k \underset{n\to+\infty}{=} C_1 + o\left(1\right).$$

Donc par la question précédente,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln\left(n+1\right) - \sum_{k=1}^{n} b_k = \ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \sum_{k=1}^{n} b_k \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + o(1) + C_1 + o(1).$$

Conclusion,

$$\boxed{\exists C_1 \in \mathbb{R}, \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + C_1 + o\left(1\right).}$$

Partie 2 : Somme de logarithmes

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \ln(n)$ et $U_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

6. Puisque $\ln(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, on en déduit que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge grossièrement et donc notamment diverge. De même $((-1)^n \ln(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas vers 0. Donc $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} (-1)^n u_n$ diverge grossièrement donc diverge. Conclusion,

$$\boxed{(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ et } \sum_{n\in\mathbb{N}^*} (-1)^n u_n \text{ divergent.}}$$

7. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. La fonction $f : t \mapsto \ln(t)$ est continue et croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc par le théorème de comparaison série/intégrale, on a

$$\int_1^n \ln(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=2}^{n} u_k \leqslant \int_2^{n+1} \ln(t)\,\mathrm{d}t.$$

Or

$$\int_1^n \ln(t)\,\mathrm{d}t = \left[t\ln(t) - t\right]_{t=1}^{t=n} = n\ln(n) - n + 1.$$

De même

$$\int_2^{n+1} \ln(t)\,\mathrm{d}t = (n+1)\ln\left(n+1\right) - (n+1) - 2\ln(2) + 2 = (n+1)\ln\left(n+1\right) - n - 2\ln(2) + 1.$$

Ainsi,

$$n\ln(n) - n + 1 \leqslant \sum_{k=2}^{n} u_k \leqslant (n+1)\ln\left(n+1\right) - n - 2\ln(2) + 1.$$

Ou encore, puisque $u_1 = \ln(1) = 0$,

$$n\ln(n) - n + 1 \leqslant U_n = \sum_{k=1}^{n} u_k \leqslant (n+1)\ln\left(n+1\right) - n - 2\ln(2) + 1.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2, \qquad n\ln(n) - n + 1 \leqslant U_n \leqslant (n+1)\ln\left(n+1\right) - n + 1 - 2\ln(2).}$$

8. Puisque $1 \underset{n\to+\infty}{\ll} -n \underset{n\to+\infty}{\ll} n\ln(n)$, on en déduit que
$$n\ln(n) - n + 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln(n).$$
D'autre part,
$$\begin{aligned}(n+1)\ln(n+1) - n - 2\ln(2) + 1 &\underset{n\to+\infty}{=} (n+1)\ln(n) + (n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - n + 1 - 2\ln(2)\\ &\underset{n\to+\infty}{=} n\ln(n) + \ln(n) + (n+1)\,o(1) - n + 1 - 2\ln(2)\\ &\underset{n\to+\infty}{=} n\ln(n) + o\left(n\ln(n)\right)\\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln(n).\end{aligned}$$
Donc par la question précédente et le théorème d'encadrement des équivalents, on en conclut que
$$\boxed{U_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln(n).}$$

Partie 3 : Soyons plus précis

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, on pose $v_n = \displaystyle\int_{n-1}^{n} \ln(n) - \ln(t)\,\mathrm{d}t$ et $V_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} v_k$.

9. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, f une fonction continue sur $[a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$. Alors, il existe $c \in\,]a; b[$ tel que
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

10. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Soit $t \in [n-1; n[$. La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc continue sur $[t; n] \subseteq [n-1; n] \subseteq [1; +\infty[$ et dérivable sur $]t; n[$ (non vide car $t < n$). Donc par l'identité des accroissements finis, il existe $c_{n,t} \in\,]t; n[$ tel que
$$\frac{\ln(n) - \ln(t)}{n - t} = \frac{1}{c_{n,t}}.$$
Or $c_{n,t} \in\,]t; n[\, \subseteq [n-1; n]$. Donc $\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{c_{n,t}} \leqslant \frac{1}{n-1}$. Ainsi,
$$\frac{1}{n} \leqslant \frac{\ln(n) - \ln(t)}{n - t} \leqslant \frac{1}{n-1}.$$
Or $n - t > 0$ donc
$$\frac{n-t}{n} \leqslant \ln(n) - \ln(t) \leqslant \frac{n-t}{n-1}.$$
On note que l'inégalité reste vraie si $t = n$. Conclusion,
$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ \forall t \in [n-1; n], \qquad \frac{n-t}{n} \leqslant \ln(n) - \ln(t) \leqslant \frac{n-t}{n-1}.}$$

11. Soit $n \geqslant 2$. Par croissance de l'intégrale car les bornes sont dans le bon sens ($n \geqslant n-1$), on a
$$\int_{n-1}^{n} \frac{n-t}{n}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{n-1}^{n} \ln(n) - \ln(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{n-t}{n-1}\,\mathrm{d}t.$$
Or
$$\int_{n-1}^{n} n - t\,\mathrm{d}t = n\left(n - (n-1)\right) - \left[\frac{t^2}{2}\right]_{t=n-1}^{t=n} = n - \frac{n^2}{2} + \frac{(n-1)^2}{2} = \frac{2n - n^2 + n^2 - 2n + 1}{2} = \frac{1}{2}.$$
Conclusion,
$$\boxed{\forall n \geqslant 2, \qquad \frac{1}{2n} \leqslant v_n \leqslant \frac{1}{2(n-1)}.}$$

12. Par la question précédente, on a

$$\forall n \geqslant 2, \qquad 0 \leqslant \frac{1}{2n} \leqslant v_n.$$

Or $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{2n}$ diverge en tant que série harmonique (ou de Riemann d'exposant $\alpha = 1 \leqslant 1$). Donc par le théorème de comparaison des séries à termes positifs,

$$\boxed{(V_n)_{n\geqslant 2} \text{ diverge.}}$$

13. Par la question 11. pour tout $n \geqslant 2$ on a

$$0 \leqslant v_n - \frac{1}{2n} \leqslant \frac{1}{2(n-1)} - \frac{1}{2n} = \frac{n-(n-1)}{2n(n-1)} = \frac{1}{2n(n-1)}.$$

Or $\frac{1}{2n(n-1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{2n^2} > 0$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{2n^2}$ converge en tant que série de Riemann d'exposant $\alpha = 2 > 1$. Donc $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{2n(n-1)}$ converge également. Ainsi, par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, on en conclut que

$$\boxed{\sum_{n\geqslant 2} \left(v_n - \frac{1}{2n}\right) \text{ converge.}}$$

On note S sa somme totale.

14. On a vu à la question précédente que pour tout $n \geqslant 2$, $v_n - \frac{1}{2n} \geqslant 0$. Donc pour tout $n \geqslant 2$,

$$0 \leqslant \left|\cos(n)\left(v_n - \frac{1}{2n}\right)\right| \leqslant v_n - \frac{1}{2n}.$$

On sait également, toujours par la question précédente que $\sum_{n\geqslant 2} \left(v_n - \frac{1}{2n}\right)$ converge. Donc par le théorème de comparaison des séries à termes positifs,

$$\sum_{n\geqslant 2} \left|\cos(n)\left(v_n - \frac{1}{2n}\right)\right| \text{ converge.}$$

Autrement dit $\sum_{n\geqslant 2} \cos(n)\left(v_n - \frac{1}{2n}\right)$ converge absolument. Or la convergence absolue implique la convergence. Conclusion,

$$\boxed{\sum_{n\geqslant 2} \cos(n)\left(v_n - \frac{1}{2n}\right) \text{ converge.}}$$

15. Par la question 13.

$$\sum_{k=2}^{n} \left(v_k - \frac{1}{2k}\right) \underset{n\to+\infty}{=} S + o(1) \qquad \Leftrightarrow \qquad \sum_{k=2}^{n} v_k - \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} S + o(1).$$

Par la question 5.

$$\sum_{k=2}^{n} v_k - \frac{1}{2}\left(\ln(n) + C_1 + o(1)\right) \underset{n\to+\infty}{=} S + o(1) \qquad \Leftrightarrow \qquad \sum_{k=2}^{n} v_k \underset{n\to+\infty}{=} \frac{\ln(n)}{2} + \frac{C_1}{2} + S + o(1).$$

Conclusion, en posant $C_2 = \frac{C_1}{2} + S$, on obtient que

$$\boxed{V_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{\ln(n)}{2} + C_2 + o(1).}$$

16. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. On a par définition, pour tout $k \in [\![2; n]\!]$,

$$v_k = \int_{k-1}^{k} \ln(k) - \ln(t)\,\mathrm{d}t = \ln(k) - \int_{k-1}^{k} -\ln(t)\,\mathrm{d}t$$

Donc en sommant,

$$V_n = \sum_{k=2}^{n} v_k = \sum_{k=2}^{n} \ln(k) - \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \ln(t)\,\mathrm{d}t = U_n - 0 - \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \ln(t)\,\mathrm{d}t.$$

Par la relation de Chasles,

$$V_n = U_n - \int_{1}^{n} \ln(t)\,\mathrm{d}t = U_n - [t\ln(t) - t]_{t=1}^{t=n} = U_n - n\ln(n) + n - 1.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \geqslant 2, \qquad V_n = U_n - n\ln(n) + n - 1.}$$

17. Par la question précédente,

$$\forall n \geqslant 2, \qquad U_n = V_n + n\ln(n) - n + 1.$$

Donc par la question 15.

$$U_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{\ln(n)}{2} + C_2 + o(1) + n\ln(n) - n + 1.$$

Posons $C_3 = C_2 + 1$. Dès lors,

$$\boxed{U_n \underset{n\to+\infty}{=} n\ln(n) - n + \frac{\ln(n)}{2} + C_3 + o(1).}$$

Partie 4 : Il est temps de conclure

18. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n = n^2$ et $\beta_n = n^2 + n$. Alors, on a bien

$$\beta_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2 = \alpha_n.$$

Pourtant,

$$\frac{\mathrm{e}^{\beta_n}}{\mathrm{e}^{\alpha_n}} = \frac{\mathrm{e}^{n^2+n}}{\mathrm{e}^{n^2}} = \mathrm{e}^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Donc $\mathrm{e}^{\alpha_n} \underset{n\to+\infty}{\ll} \mathrm{e}^{\beta_n}$. En particulier, $(\mathrm{e}^{\alpha_n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{e}^{\beta_n})_{n\in\mathbb{N}}$ ne sont pas équivalentes au voisinage de $+\infty$. On a donc trouvé un exemple pour lequel on a

$$\left(\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \beta_n\right) \text{ ET } \textit{non} \left(\mathrm{e}^{\alpha_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{\beta_n}\right)$$

Conclusion,

$$\boxed{\left[\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \beta_n \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{e}^{\alpha_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{\beta_n}\right] \text{ est fausse en général.}}$$

19. Pour tout $k \geqslant 2$, $\ln(k) > 0$ donc pour tout $n \geqslant 2$, $U_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(k) > 0$.

    Pour tout $n \geqslant 2$, on a
$$U_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(k) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n} k\right) = \ln(n!)\,.$$
    Ainsi,
$$n! = \mathrm{e}^{U_n}\,.$$
    Par la question 17., sans passer aux équivalents, la question précédente nous ayant dissuadé de le faire, on a
$$\begin{aligned} n! &\underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{e}^{n\ln(n)-n+\frac{\ln(n)}{2}+C_3+o(1)} \\ &\underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{e}^{n\ln(n)}\,\mathrm{e}^{-n}\,\mathrm{e}^{\frac{\ln(n)}{2}}\,\mathrm{e}^{C_3}\,\mathrm{e}^{o(1)} \\ &\underset{n\to+\infty}{=} n^n\,\mathrm{e}^{-n}\,\sqrt{n}\,\mathrm{e}^{C_3}\,(1+o(1))\,. \end{aligned}$$
    Posons $\gamma = \mathrm{e}^{C_3} \in \mathbb{R}_+^*$. Alors, on applaudit Stirling et sa formule :
$$\boxed{n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \gamma n^n\,\mathrm{e}^{-n}\,\sqrt{n}}$$


    NB : avec les intégrales de Wallis, il est même possible de montrer que $\gamma = \sqrt{2\pi}$. La beauté des mathématiques n'a pas de fin.