Epreuve de mathématiques 8
2021-2022

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé
Durée : 4h

Encadrer les résultats et numéroter les copies

Problème 1 - Applications linéaires

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, $f \in \mathscr{L}(E)$. On s'intéresse dans ce problème aux endomorphismes de E vérifiant

$$(\bigstar) \qquad f^2 = f + 2\mathrm{Id}_E,$$

où Id_E désigne l'application identité de E et $f^2 = f \circ f$. On rappelle que $f^0 = \mathrm{Id}_E$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f^k = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ fois}}$.

Partie 1 : Partons de $\mathbb{R}^4$

On suppose dans cette partie que $E = \mathbb{R}^4$ et on considère l'application :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^4 \\ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} & \mapsto & \begin{bmatrix} 2x - z + t \\ -2x + z - t \\ -y + t \\ -2x - y + z \end{bmatrix} \end{array}$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$.
2. Déterminer une base de l'image de φ.
3. L'application φ est-elle surjective ?
4. L'application φ est-elle injective ?

On définit les vecteurs $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $e_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et on pose $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$.

5. Calculer le rang de $\mathscr{B}$. Que peut-on en déduire ?
6. Calculer $\varphi(\mathscr{B})$.
7. Déterminer une base du noyau de φ.
8. Les espaces $\mathrm{Ker}(\varphi)$ et $\mathrm{Im}(\varphi)$ sont-ils supplémentaires ?
9. Calculer $\varphi^2(\mathscr{B})$.
10. En déduire φ^2 en fonction de φ. Que dire de φ ? Est-ce cohérent avec la question 8. ?
11. On pose $f_0 = 3\,\varphi - \mathrm{Id}_E$. Montrer que f_0 vérifie $(\bigstar)$

Partie 2 : Passons aux choses sérieuses

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel non nul (non nécessairement de dimension finie).

12. Déterminer toutes les symétries vérifiant $(\bigstar)$
13. On dit que $f \in \mathscr{L}(E)$ est une homothétie si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f = \lambda\,\mathrm{Id}_E$. Déterminer toutes les homothéties vérifiant $(\bigstar)$

On fixe maintenant $f \in \mathscr{L}(E)$ solution de $(\bigstar)$ On pose $g = f - 2\mathrm{Id}_E$ et $h = f + \mathrm{Id}_E$.

14. Montrer que $f \in \mathrm{GL}(E)$ et déterminer f^{-1}.
15. Soient $(u, v) \in \mathscr{L}(E)^2$. Montrer que $u \circ v = 0_{\mathscr{L}(E)} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(v) \subseteq \mathrm{Ker}(u)$.

16. Déterminer $g \circ h$ et $h \circ g$.
17. Montrer que $\mathrm{Ker}\,(g)$ et $\mathrm{Ker}\,(h)$ sont en somme directe.
18. On suppose dans cette question seulement que E est de dimension finie et on note $n = \dim(E)$.
    (a) Montrer que $\dim(\mathrm{Ker}\,(g)) + \dim(\mathrm{Ker}\,(h)) \geqslant n$.
    (b) Montrer que $\mathrm{Ker}\,(g)$ et $\mathrm{Ker}\,(h)$ sont supplémentaires.

On revient à E de dimension quelconque. On pose

$$I : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}[X] & \to & \mathscr{L}(E) \\ P & \mapsto & P(f) \end{array}$$

On note alors $\mathbb{R}[f] = \mathrm{Im}\,(I)$.

19. Montrer que I est linéaire et préciser $I\left(X^2 - X - 2\right)$
20. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^k \in \mathrm{Vect}\,(\mathrm{Id}_E, f)$.
21. Montrer que $\mathrm{Id}_E \in \mathbb{R}[f]$ et $f \in \mathbb{R}[f]$.
22. En déduire que (Id_E, f) est une famille génératrice de $\mathbb{R}[f]$.
23. (a) Montrer que $\mathrm{Id}_E \in \mathrm{Vect}\,(g, h)$.
    (b) Montrer que $f \in \mathrm{Vect}\,(g, h)$.
    (c) Montrer que $\mathbb{R}[f] = \mathrm{Vect}\,(g, h)$.
24. A l'aide de la question 23.a montrer que $E = \mathrm{Ker}\,(g) \oplus \mathrm{Ker}\,(h)$.

Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $p = \lambda\, g$ et $q = \mu h$.

25. Déterminer une valeur de λ et une valeur de μ pour que p et q soient des projecteurs.
26. Avec les valeurs de la question précédente, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f^n = (-1)^n\, p + 2^n q.$$

27. La formule reste-elle vrai pour $n = -1$?

Exercice 2 - Dénombrement

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On considère une urne contenant N boules rouges, N boules oranges et N boules vertes. On suppose toutes les boules discernables et numérotées de 1 à N pour chaque couleur. On effectue $p \in [\![1; N]\!]$ tirages. On demande les résultats sous forme littérale et non nécessairement simplifiés.

1. On suppose les tirages successifs et avec remise.
    (a) Calculer le nombre total de résultats possibles.
    (b) Calculer le nombre de résultats pour lesquels on n'a jamais pioché deux fois de suite deux boules de même couleur.
2. On suppose que l'on tire les p boules simultanément. Calculer la probabilité d'avoir obtenu exactement $k \in [\![0; p]\!]$ boules rouges.
3. On suppose les tirages successifs et sans remise.
    (a) Soit $k \in [\![0; p]\!]$. Calculer le nombre de résultats donnant exactement k boules rouges.
    (b) En déduire le nombre de résultats pour lesquels on a pioché au moins une fois une boule rouge. *Le résultat sera laissé sous forme d'une somme.*
    (c) Retrouver le résultat de la question précédente par une autre méthode.
    L'expression littérale du résultat ne sera pas nécessairement identique.

Problème 3 - Probabilités

Soit $N \in \mathbb{N}$, $N \geqslant 2$. On considère une urne contenant N boules rouges et N boules vertes. On fixe $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé sur lequel sont définies toutes les variables aléatoires de ce problème. On effectue successivement des tirages uniformes dans l'urne avec le protocole suivant :

- Si l'on pioche une boule rouge, on la peint en vert et on la replace dans l'urne.
- Si l'on pioche une boule verte, on la remet dans l'urne sans changer sa couleur.

Au tirage $k \in \mathbb{N}^*$, on note X_k la variable aléatoire retournant 1 si la boule est rouge et 0 sinon.

Partie 1 : Lois initiales

1. Déterminer la loi de X_1.
2. Déterminer la probabilité d'avoir obtenu une boule rouge au second tirage sachant que l'on a obtenu une boule rouge au premier tirage.
3. Déterminer la loi de X_2.
4. Les évènements $(X_1 = 1)$ et $(X_2 = 1)$ sont-ils indépendants ?
5. Déterminer la probabilité d'avoir obtenu une boule verte au premier tirage sachant que l'on a obtenu une boule rouge au second tirage.

Partie 2 : Autour de la somme

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. On fixe $n \in [\![1; N-1]\!]$.

6. Préciser $S_n(\Omega)$ l'univers image de S_n.
7. Enoncer en français l'évènement $(S_n = 0)$, l'écrire comme une intersection d'évènements de X_i puis calculer sa probabilité.
8. Soit $k \in [\![0; n]\!]$. Calculer $\mathbb{P}(X_{n+1} = 1 \mid S_n = k)$ et $\mathbb{P}(X_{n+1} = 0 \mid S_n = k)$ en fonction de N et k.
9. Soit $i \in [\![0; n]\!]$. Préciser pour tout $j \in [\![0; n+1]\!]$, $\mathbb{P}(S_{n+1} = j \mid S_n = i)$.
10. En déduire que
$$\forall k \in [\![1; n]\!], \qquad \mathbb{P}(S_{n+1} = k) = \frac{N-k+1}{2N}\mathbb{P}(S_n = k-1) + \frac{N+k}{2N}\mathbb{P}(S_n = k).$$
On admet/vérifie facilement que la formule reste vraie pour $k = 0$ ou $k = n+1$.

Partie 3 : Comportement asymptotique de l'espérance

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(S_n = k)$.

Le nombre u_n correspond au nombre moyen de boules rouges obtenues durant n tirages.

11. Vérifier que pour tout $n \in [\![1; N-1]\!]$,
$$\sum_{k=1}^{n+1} k\mathbb{P}(S_{n+1} = k) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(k+1)(N-k)}{2N}\mathbb{P}(S_n = k) + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{k(N+k)}{2N}\mathbb{P}(S_n = k).$$
12. Montrer que pour tout $n \in [\![1; N-1]\!]$, $u_{n+1} = \frac{2N-1}{2N}u_n + \frac{1}{2}$.
On admet que cette formule reste vraie pour $n \geqslant N$.
13. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une expression de u_n en fonction de n.
14. Déterminer, si elle existe, la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. Interpréter.