Commentaires du DS8 Applications linéaires, dénombrement, probabilités

Problème I - Applications linéaires

Globalement cela reste correct mais il persiste des erreurs déjà signalées sur le précédent DS et certaines notions pourtant basiques dans ce chapitre sont mal maîtrisées pour plusieurs. L'algèbre linéaire étant un gros morceau de votre programme (1ière et seconde année) et du concours (deux épreuves sur les trois... sans parler de l'oral), il est impossible de ne pas la maitriser solidement.

Partie 1 : Partons de $\mathbb{R}^4$

1. Bien et souvent bien rédigée. Vous avez bien parlé d'espace de départ et d'arrivée.
2. Plutôt bien dans l'ensemble, même si cela n'a pas été complètement évident pour tout le monde. Un pivot de Gauss est obligatoire pour simplifier la famille. Certains ont parlé de non colinéarité pour trois vecteurs, et ont donc obtenu une conclusion fausse, c'est bien fait !
3. La question est immédiate à partir de la question précédente et donc nécessite d'être un minimum rédigée. Quelques-uns ont confondu surjectivité et injectivité. Allons allons, un peu de sérieux !
4. Beaucoup trop sont partis dans un calcul laborieux du noyau. Heureusement pour eux la question 7 récompensait cet effort mais il est très très très dommageable de ne pas connaître le théorème de caractérisation des isomorphismes en dimension finie. Très peu y ont pensé ! Au minimum on repassait par le théorème du rang, mais la connaissance du théorème n'est pas une option.
5. Revoir un peu la rédaction. Faites directement les opérations élémentaires sur le rang plutôt que de les faire sur $\mathscr{B}$ puis ensuite de se raccrocher au rang. Un point pour le calcul du rang et un autre pour la déduction que $\mathscr{B}$ est une base. Puisque l'on pose la question, là aussi il faut le rédiger un peu. Un demi-point pour la justification !
6. Vous confondez famille et espace vectoriel ici. On parle bien de $\varphi(\mathscr{B})$ et non d'espace engendré ou de $\mathrm{Im}(\varphi)$. La plupart d'entre vous on enlever les vecteurs nuls et donc ont perdu la moitié des points, car enlever un vecteur modifie la famille (et notamment son caractère libre ou lié d'ailleurs).
7. Assez bien. Le pivot n'est pas toujours bien mis en oeuvre cependant. Quelques lacunes également dans le passage en forme de Vect. Soyez rigoureux ! Votre résultat doit absolument coïncider avec le théorème du rang et le résultat de la question 2. Regardez bien la méthode du corrigé qui est plus astucieuse... et plus élégante !
8. Là aussi le théorème du rang oblige ! Ce n'est pas du tout naturel pour un bonne partie d'entre vous. Plusieurs belles réponses mais j'ai l'impression que le théorème de la base adaptée n'est pas acquis naturel pour tout le monde.
9. Même remarque qu'à la question 6.
10. Très très peu de justification pourquoi $\varphi^2 = \varphi$. Deux ou trois belles réponses ont compris qu'il fallait dire que l'image d'une base caractérise l'application linéaire. Ce n'est pas toujours clair pourquoi cela est cohérent avec la question 8.. Il ne suffit pas de dire « oui oui, ça l'est ».
11. Pas très dur, mais il faut maitrisé les polynômes d'endomorphismes (i.e. composée et somme). N'oubliez pas de bien noter les $\circ$ dans les composées. Il passe beaucoup trop à la trappe.

Partie 2 : Passons aux choses sérieuses

12. Plutôt bien. Certains ont même détaillé de l'analyse-synthèse. Des équivalents fonctionnaient aussi ici.

13. La simplification $\left(\lambda^2 - \lambda - 2\right) \mathrm{Id}_E = 0_{\mathscr{L}(E)}$ n'est généralement pas détaillé mais je n'ai pas (ou peu) sanctionné. Ici aussi il faut être à l'aise avec les polynômes d'endomorphismes.

14. Reproduction exacte d'une question du TD, mais pas tant que cela de bonnes réponses. Attention préciser bien que $f \circ \tilde{f} = \tilde{f} \circ f = \mathrm{Id}_E$, pour les applications linéaires il faut les deux côtés. J'ai été ici aussi indulgent mais cela reste important.

15. Je m'attendais à de meilleurs résultats ici. La plupart d'entre vous à commis l'erreur suivante :

    Montrons que $Im(v) \subseteq Ker(u)$ implique $u \circ v = 0_{\mathscr{L}(E)}$. Soit $y \in Im(v)$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = v(x)$. Puisque $Im(v) \subseteq Ker(u)$, on obtient que $y \in Ker(u)$ donc $u(y) = 0_E$ (ici vous confondez 0_E et $0_{\mathscr{L}(E)}$ au passage) et donc $u(v(x)) = u \circ v(x) = 0_E$. Donc $u \circ v = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

    Le dernier donc est faux car vous n'avez pas pris x quelconque ! Votre rédaction ne doit absolument pas commencer par $y \in \mathrm{Im}(v)$, mais par prendre $x \in E$ complètement libre. Ensuite, et ensuite seulement on définit $y = v(x)$. A reprendre. Certains ce sont trompés dans l'autre sens aussi avec une erreur similaire.

16. N'oubliez pas de simplifier votre résultat, il fallait penser à utiliser ($\bigstar$) pour trouver $0_{\mathscr{L}(E)}$ finalement. Beaucoup l'ont vu.

17. Là aussi c'est du TD. Pas très difficile en déroulant les définitions mais cela se faisait sans rapport avec les questions précédentes ce qui vous a peut-être un peu perturbés. Certains confondent somme directe et supplémentaires. Ouille ouille ouille.

18. (a) Pas beaucoup mais quelques belles réponses.
    (b) Plus dure, peu traitée.

19. Facile. Attention dans $I\left(X^2 - X - 2\right)$, le 2 devient $2\mathrm{Id}_E$... Là aussi on demande de simplifier le résultat.

20. Peu traitée mais quelques belles réponses !

21. Peu traitée.

22. Non réussie.

23. (a) Une ou deux bonnes réponses.
    (b) Une ou deux bonnes réponses.
    (c) Non réussie.

24. Non traitée.

25. Deux ou trois bonnes réponses, non traitée sinon.

26. Non traitée.

27. Non traitée.

Exercice II - Dénombrement

Plusieurs bonnes copies. D'autres ne maitrisent pas les définitions.

1. (a) Deux points faciles à prendre dès que l'on connaît la définition d'un p-uplet et le cardinal associé. On avait bien $3N$ possibilités à chaque tirage et non juste 3 car l'on considérait toutes les boules et non juste leur couleur (y compris pour les questions suivantes).
   (b) Assez bien dans l'ensemble. Rédigez bien l'intégralité de la question et n'oubliez pas que le premier tirage est lui totalement libre.

2. On ne parlait pas de cardinal ici mais bien de probabilité. Il fallait donc renormaliser par le nombre total de tirages qui n'est pas le résultat de la question 1 car ici nous sommes passé à des tirages simultanés. Beaucoup oublient de choisir les boules non-rouges, ce qui est nécessaire pour compléter le tirage.

3. (a) J'ai souvent vu $A_N^k A_{2N}^{p-k}$. Dans ceci ont range bien les rouges entre elles (A_N^k), on range bien les non-rouges entre elles (A_{2N}^{p-k}) mais on ne range pas les non-rouges par rapport aux rouges, cela ne suffit donc pas.
   (b) Des confusions parfois entre la b) et la c) ce qui n'a pas d'importance. Cependant beaucoup parachutent la somme sans l'expliquer proprement. Plus le résultat est immédiat plus il nécessite une justification propre.
   (c) Assez bien dans l'ensemble.

Problème III - Probabilités

Je suis plutôt satisfait de vos performances ici. Il manque encore des justifications et certains n'ont pas assimilés les définitions mais j'ai eu aussi de belles copies y compris chez des étudiants qui ne sont pas en tête de classe.

Partie 1 : Lois initiales

1. C'est globalement assez confus mais certainement parce que nous n'avons pas encore travaillé cette notion, on y reviendra dès la rentrée. Il fallait non seulement reconnaître une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli mais aussi déterminer proprement son paramètre. Trop d'entre vous ont parlé d'une binomiale (ce qui est maladroit et inexact si vous ne préciser pas les deux paramètres) ou d'une uniforme (même remarque).

2. Certains ont introduit de nouvelles notations pour les évènements « obtenir une rouge au tirage k », c'est maladroit, il faut suivre les notations de l'énoncé et ceci était décrit par $(X_k = 1)$. La question ne comportant pas de calcul, il fallait justifier proprement le résultat. Ne repassez pas à l'intersection, que l'on ne sait pas calculer (autrement que de revenir à la probabilité conditionnelle). Bien sinon.

3. Plusieurs belles réponses. Là aussi, il fallait parler d'une loi de Bernoulli et calculer son paramètre. Le calcul de son paramètre nécessitait la formule des probabilités totales. La question n'est donc pas immédiate, mais plusieurs la rédigent bien.

4. Assez bien dans l'ensemble sauf que vous ne justifiez pas d'où viennent vos résultats. Citez proprement les questions que vous utilisez. Et l'abréviation Q.3 par exemple n'est pas autorisée. Aucun d'entre vous n'a justifié que $\frac{2N-1}{4N} = \frac{N-1}{2N}$. Ce n'est pas parce que les deux expressions ne se ressemblent pas que forcément elles sont différentes. Notamment, une valeur de N pouvait être particulière et donner l'indépendance dans un cas particulier !

5. Pas mal de belles réponses aussi. N'oubliez pas de préciser que $\mathbb{P}(X_2 = 1) \neq 0$ et là aussi de justifier d'où viennent vos résultats.

Partie 2 : Autour de la somme

6. Beaucoup de confusions ici. Déjà sur la nature de $S_n(\Omega)$ mais aussi sur le résultat qui est en n et non en N. Enfin, un seul d'entre vous je crois a pensé à signaler que $n \leqslant N$ et que donc l'on pouvait toujours avoir obtenu n boules boules rouges. Subtil mais important !

7. Bien dans l'ensemble ! Vous avez bien compris à quoi correspondait S_n et vous avez souvent pu écrire l'évènement. Certains sont passé directement à la probabilité ce qui ne répond pas à la question, il fallait d'abord écrire $(S_n = 0)$ en terme d'intersection. Pour le calcul de la probabilité rédigez bien là aussi chaque étape, le passage trop rapide à $1/2^n$ vous faisait perdre des points.

8. Bien. N'hésitez pas à préciser que ces probabilités existent car $(S_n = k)$ est non négligeable même si l'énoncé n'en parlait pas.

9. Moins bien réussi. Notamment vous n'avez pas toujours su gérer les cas $j < i$ ou $j > i + 1$. Il faut malgré tout donner leur probabilité même si celle-ci est nulle ! La justification des cas $j = i$ et $j = i+1$ n'est pas toujours limpide.

10. Le résultat vous était donné ce qui a fait que plusieurs d'entre vous y ont été beaucoup trop rapidement. Il fallait appliquer la formule des probabilités totales mais $((S_n = k), (S_n = k-1))$ ne forme pas un système complet d'évènements ! ! ! Il faut aussi expliquer l'utilisation de la question précédente.

Partie 3 : Comportement asymptotique de l'espérance

11. Quelques bonnes réponses. N'oubliez pas de présenter votre variable n ou k.

12. Plus dur. Un ou deux ont bloqué sur $\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(S_n = k)$.

13. Facile ! Une suite arithmético-géométrique ! Certains ont bien démarré mais n'ont pas réussi à aller jusqu'au bout... A savoir absolument.

14. Certains ont anticipé le fait que la limite soit nulle. Non, car S_n n'est pas le nombre de boules « que l'on vient de piocher » mais plutôt le nombre total de boules rouges piochées depuis le tout début.