Corrigé du Devoir Surveillé 8
Applications linéaires, dénombrement et probabilités

Problème I - Applications linéaires

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, $f \in \mathscr{L}(E)$. On s'intéresse dans ce problème aux endomorphismes de E vérifiant

$$(\bigstar) \qquad f^2 = f + 2\mathrm{Id}_E,$$

où Id_E désigne l'application identité de E et $f^2 = f \circ f$. On rappelle que $f^0 = \mathrm{Id}_E$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f^k = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ fois}}$.

Partie 1 : Partons de $\mathbb{R}^4$

On suppose dans cette partie que $E = \mathbb{R}^4$ et on considère l'application :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^4 \\ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} & \mapsto & \begin{bmatrix} 2x - z + t \\ -2x + z - t \\ -y + t \\ -2x - y + z \end{bmatrix} \end{array}$$

1. Par définition, φ est bien une application définie de $\mathbb{R}^4$ à valeurs de $\mathbb{R}^4$. Il nous faut donc montrer que φ est linéaire. Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $X = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ et $X' = (x', y', z') \in \mathbb{R}^4$. Alors,

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda X + \mu X') &= \varphi\left(\begin{bmatrix} \lambda x + \mu x' \\ \lambda y + \mu y' \\ \lambda z + \mu z' \\ \lambda t \mu t' \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 2(\lambda x + \mu x') - z + t \\ -2(\lambda x + \mu x') + (\lambda z + \mu z') - t \\ -(\lambda y + \mu y') + (\lambda t + \mu t') \\ -2(\lambda x + \mu x') - (\lambda y + \mu y') + (\lambda z + \mu z') \end{bmatrix} \\ &= \lambda \begin{bmatrix} 2x - z + t \\ -2x + z - t \\ -y + t \\ -2x - y + z \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 2x - z + t \\ -2x + z - t \\ -y + t \\ -2x - y + z \end{bmatrix} \\ &= \lambda \varphi(X) + \mu \varphi(X'). \end{aligned}$$

Donc φ est bien linéaire. Conclusion,

$$\boxed{\varphi \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}^4 : \varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^4).}$$

2. Soit $\mathscr{C} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Puisqu'elle engendre $\mathbb{R}^4$, on a

$$\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Vect}(\varphi(\mathscr{C})) = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$$

On observe que $C_1 = -2C_3$. Donc

$$\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}0\\0\\-1\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-1\\1\\0\end{bmatrix}\right).$$

Les opérations élémentaires ne modifient pas l'espace engendré donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}(\varphi) &= \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\-1\\-1\end{bmatrix}\right) && C_1 \leftrightarrow C_3 \\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\-1\\-1\end{bmatrix}\right) && C_2 \leftarrow C_2 + C_1 \\
&= \mathrm{Vect}\underbrace{\left(\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix}\right)}_{\mathscr{B}_I} && \text{car } C_3 = -C_2
\end{aligned}$$

Puisque $\mathscr{B}_I$ est constitué de deux vecteurs non colinéaires, elle est libre. De plus $\mathscr{B}_I$ engendre $\mathrm{Im}(f)$. Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{B}_I = \left(\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix}\right) \text{ est une base de } \mathrm{Im}(\varphi) \text{ et donc } \mathrm{rg}(\varphi) = \mathrm{Card}(\mathscr{B}_I) = 2.}$$

3. Puisque $\mathrm{rg}(\varphi) = 2 \neq 4 = \dim\left(\mathbb{R}^4\right)$. On note que $\mathrm{Im}(\varphi)$ est donc différent de $\mathbb{R}^4$. Conclusion,

$$\boxed{\varphi \text{ n'est pas surjective.}}$$

4. Puisque φ est un endomorphisme sur $\mathbb{R}^4$ et que $\mathbb{R}^4$ est de dimension finie, par caractérisation des isomorphismes en dimension finie :

$$\varphi \text{ surjective} \qquad \Leftrightarrow \qquad \varphi \text{ injective} \qquad \Leftrightarrow \qquad \varphi \text{ bijective.}$$

Donc comme φ n'est pas surjective, on en déduit directement que

$$\boxed{\varphi \text{ n'est pas injective non plus.}}$$

On définit les vecteurs $e_1 = \begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\1\\1\end{bmatrix}$, $e_3 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix}$, $e_4 = \begin{bmatrix}1\\-1\\1\\0\end{bmatrix}$ et on pose $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$.

5. On les opérations élémentaires suivantes :

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}\,(\mathscr{B}) &= \mathrm{rg}\left(\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\0\end{bmatrix}\right)\\
&= \mathrm{rg}\left(\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right) && C_4 \leftarrow C_4 - C_1\\
&= \mathrm{rg}\left(\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right) && \begin{array}{c}C_1 \leftarrow C_1 + C_4\\ C_2 \leftarrow C_2 - C_4\\ C_3 \leftarrow C_3 - C_4\end{array}\\
&= \mathrm{rg}\left(\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right) && \begin{array}{c}C_1 \leftarrow C_1 - C_3\\ C_2 \leftarrow C_2 - C_3\end{array}\\
&= \mathrm{rg}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right) && C_1 \leftarrow C_1 + C_2\ .
\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{rg}\,(\mathscr{B}) = \mathrm{rg}\,(\mathscr{C})$. Or $\mathscr{C}$ est une base de $\mathbb{R}^4$ donc $\mathrm{rg}\,(\mathscr{C}) = 4$. Conclusion,

$$\boxed{\mathrm{rg}\,(\mathscr{B}) = 4.}$$

Puisque $\mathrm{rg}\,(\mathscr{B}) = \mathrm{Card}\,(\mathscr{B})$, on en déduit que $\mathscr{B}$ est libre et comme $\mathrm{rg}\,(\mathscr{B}) = \dim\left(\mathbb{R}^4\right)$, elle est aussi génératrice. Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{B} \text{ est une base de } \mathbb{R}^4.}$$

6. On a

$$\begin{aligned}
\varphi\,(e_1) &= \varphi\left(\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}2-1-1\\-2+1+1\\1-1\\-2+1+1\end{bmatrix} = 0_{\mathbb{R}^4}\\
\varphi\,(e_2) &= \varphi\left(\begin{bmatrix}0\\1\\1\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}-1+1\\1-1\\-1+1\\-1+1\end{bmatrix} = 0_{\mathbb{R}^4}\\
\varphi\,(e_3) &= \varphi\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}-1+1\\1-1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix} = e_3\\
\varphi\,(e_4) &= \varphi\left(\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}2-1\\-2+1\\1\\-2+1+1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\-1\\1\\0\end{bmatrix} = e_4.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\varphi(\mathscr{B}) = (0_{\mathbb{R}^4}, 0_{\mathbb{R}^4}, e_3, e_4).}$$

7. *Méthode efficace.* On a vu que $\text{rg}(\varphi) = 2$. Donc par le théorème du rang,

$$\dim(\text{Ker}(\varphi)) = \dim\left(\mathbb{R}^4\right) - \text{rg}(\varphi) = 4 - 2 = 2.$$

Donc une base de $\text{Ker}(\varphi)$ est de cardinal 2 et donc constitué de deux vecteurs non colinéaires. Or par la question précédente, $\varphi(e_1) = \varphi(e_1) = 0_{\mathbb{R}^4}$. Donc $\mathscr{B}_K = (e_1, e_2)$ est une famille de deux vecteurs de $\text{Ker}(\varphi)$. De plus $\mathscr{B}_K$ est libre en tant que sous-famille de $\mathscr{B}$ qui est une base d'après la question 5. Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{B}_K = (e_1, e_2) \text{ est une base de } \text{Ker}(\varphi).}$$

Méthode basique. Soit $X = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
X \in \text{Ker}(\varphi) \quad &\Leftrightarrow \quad \varphi(X) = 0_{\mathbb{R}^4} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x - z + t = 0 \\ -2x + z - t = 0 \\ -y + t = 0 \\ -2x - y + z = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x - z + t = 0 \\ 0 = 0 \\ -y + t = 0 \\ -y + t = 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_1 \end{array} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x - z + t = 0 \\ -y + t = 0 \end{cases} \qquad \text{car } L3 = L_4 \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} z = 2x + t \\ y = t \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad X = \begin{bmatrix} x \\ t \\ 2x + t \\ t \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\text{Ker}(\varphi) = \text{Vect}\underbrace{\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)}_{=\mathscr{B}_K}$$

La famille $\mathscr{B}_K$ engendre donc $\text{Ker}(\varphi)$ et est libre car constitué de deux vecteurs non colinéaires. Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{B}_K = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \text{ est une base de } \text{Ker}(\varphi).}$$

8. On a vu que $\mathscr{B}_K = (e_1, e_2)$ est une base de $\mathrm{Ker}\,(\varphi)$. De plus, par la question 2. $\mathscr{B}_I = (e_3, e_4)$ est une base de $\mathrm{Im}\,(\varphi)$. Enfin, par la question 5. on a $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4) = \mathscr{B}_K \cup \mathscr{B}_I$ est une base de $\mathbb{R}^4$. Conclusion, par le théorème de la base adaptée :

$$\boxed{\mathrm{Ker}\,(\varphi) \text{ et } \mathrm{Im}\,(\varphi) \text{ sont supplémentaires dans } \mathbb{R}^4 : \mathrm{Ker}\,(\varphi) \oplus \mathrm{Im}\,(\varphi) = \mathbb{R}^4.}$$

9. Par la question 6. on a

$$\varphi^2(\mathscr{B}) = \varphi(\varphi(\mathscr{B})) = \varphi((0_{\mathbb{R}^4}, 0_{\mathbb{R}^4}, e_3, e_4)) = (\varphi(0_{\mathbb{R}^4}), \varphi(0_{\mathbb{R}^4}), \varphi(e_3), \varphi(e_4)).$$

A nouveau par la question 6.

$$\varphi^2(\mathscr{B}) = (0_{\mathbb{R}^4}, 0_{\mathbb{R}^4}, e_3, e_4).$$

Conclusion,

$$\boxed{\varphi^2(\mathscr{B}) = (0_{\mathbb{R}^4}, 0_{\mathbb{R}^4}, e_3, e_4).}$$

10. Par la question précédente, on a $\varphi^2(\mathscr{B}) = \varphi(\mathscr{B})$. Or $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^4$ et l'image d'une base caractérise de façon unique une application linéaire. Conclusion,

$$\boxed{\varphi^2 = \varphi\,.}$$

Or φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$. On en déduit donc que

$$\boxed{\varphi \text{ est un projecteur de } \mathbb{R}^4.}$$

Donc par le cours, on sait que dans ce cas, φ est une projection sur $\mathrm{Im}\,(\varphi)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\,(\varphi)$. En particulier, on sait que $\mathrm{Im}\,(\varphi) \oplus \mathrm{Ker}\,(\varphi) = \mathbb{R}^4$. $\boxed{\text{On retrouve donc bien le résultat de la question 8.}}$

11. Soit $f_0 = 3\,\varphi - \mathrm{Id}_E$. Calculons :

$$\begin{aligned} f_0^2 = (3\,\varphi - \mathrm{Id}_E)^2 &= 9\,\varphi^2 - 6\,\varphi + \mathrm{Id}_E && \text{car } \varphi \text{ et } \mathrm{Id}_E \text{ commutent} \\ &= 9\,\varphi - 6\,\varphi + \mathrm{Id}_E && \text{car } \varphi \text{ est une projection} \\ &= 3\,\varphi + \mathrm{Id}_E = f_0 + \mathrm{Id}_E + \mathrm{Id}_E = f_0 + 2\mathrm{Id}_E. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{f_0 \text{ vérifie } (\bigstar) : f_0^2 = f_0 + 2\mathrm{Id}_E.}$$

Partie 2 : Passons aux choses sérieuses

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel non nul (non nécessairement de dimension finie).

12. Soit $s \in \mathscr{L}(E)$ une symétrie de E. Alors,

$$s \text{ solution de } (\bigstar) \quad \Leftrightarrow \quad s^2 = s + 2\mathrm{Id}_E \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Id}_E = s + 2\mathrm{Id}_E \quad \Leftrightarrow \quad s = -\mathrm{Id}_E.$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{l'unique primitive solution de } (\bigstar) \text{ est } -\mathrm{Id}_E \text{ (symétrie centrale)}}$$

13. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ une homothétie. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f = \lambda\,\mathrm{Id}_E$. Dès lors,

$$\begin{aligned} f \text{ solution de } (\bigstar) \quad &\Leftrightarrow \quad f^2 = f + 2\mathrm{Id}_E \\ &\Leftrightarrow \quad \lambda^2\,\mathrm{Id}_E = \lambda\,\mathrm{Id}_E + 2\mathrm{Id}_E \\ &\Leftrightarrow \quad \left(\lambda^2 - \lambda - 2\right)\mathrm{Id}_E = 0_{\mathscr{L}(E)}. \end{aligned}$$

Puisque $E \neq \{0\}$ par hypothèse, il existe $x \in E$, $x \neq 0_E$. Alors, en évaluant en x : $\left(\lambda^2 - \lambda - 2\right) x = 0_E$ et donc $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0_{\mathbb{R}}$. La réciproque est aussi vraie donc

$$f \text{ solution de } (\bigstar) \qquad \Leftrightarrow \qquad \left(\lambda^2 - \lambda - 2\right) \mathrm{Id}_E = 0_{\mathscr{L}(E)} \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda^2 - \lambda - 2 = 0_{\mathbb{R}}.$$

On observe que -1 est une racine évidente (ah bah oui d'après la question précédente !) donc

$$f \text{ solution de } (\bigstar) \qquad \Leftrightarrow \qquad (\lambda + 1)(\lambda - 2) = 0_{\mathbb{R}} \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda = -1 \quad \text{OU} \quad \lambda = 2.$$

Conclusion, les seules homothéties solutions de $(\bigstar)$ sont

$$\boxed{f = -\mathrm{Id}_E \qquad \text{et} \qquad f = 2\mathrm{Id}_E.}$$

Ce qui est cohérent avec la question précédente car on retrouver $-\mathrm{Id}_E$.

On fixe maintenant $f \in \mathscr{L}(E)$ solution de $(\bigstar)$ On pose $g = f - 2\mathrm{Id}_E$ et $h = f + \mathrm{Id}_E$.

14. Puisque f est solution de $(\bigstar)$ on a

$$f^2 - f = 2\mathrm{Id}_E \qquad \Leftrightarrow \qquad f \circ \left(\frac{f - \mathrm{Id}_E}{2}\right) = \mathrm{Id}_E \qquad \Leftrightarrow \qquad \left(\frac{f - \mathrm{Id}_E}{2}\right) \circ f = \mathrm{Id}_E.$$

Conclusion,

$$\boxed{f \in \mathrm{GL}(E) \qquad \text{et} \qquad f^{-1} = \frac{f - \mathrm{Id}_E}{2}.}$$

15. Soient $(u, v) \in \mathscr{L}(E)^2$. Supposons que $u \circ v = 0_{\mathscr{L}(E)}$. Montrons que $\mathrm{Im}(v) \subseteq \mathrm{Ker}(u)$. Soit $y \in \mathrm{Im}(v)$. Alors, il existe $x \in E$ tel que $y = v(x)$. Donc

$$u(y) = u(v(x)) = u \circ v(x) = 0_{\mathscr{L}(E)}(x) = 0_E.$$

Donc $y \in \mathrm{Ker}(u)$. Ainsi, $\mathrm{Im}(v) \subseteq \mathrm{Ker}(u)$.

Réciproquement, supposons que $\mathrm{Im}(v) \subseteq \mathrm{Ker}(u)$. Montrons que $u \circ v = 0_{\mathscr{L}(E)}$. Soit $x \in E$, on a $v(x) \in \mathrm{Im}(v)$. Donc $v(x) \in \mathrm{Ker}(u)$ i.e. $u(v(x)) = 0_E$. Ainsi,

$$u \circ v(x) = 0_E.$$

Ceci étant vrai pour tout $x \in E$, on en déduit que $u \circ v = 0_{\mathscr{L}(E)}$. Conclusion,

$$\boxed{u \circ v = 0_{\mathscr{L}(E)} \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathrm{Im}(v) \subseteq \mathrm{Ker}(u).}$$

16. On a

$$g \circ h = (f - 2\mathrm{Id}_E) \circ (f + \mathrm{Id}_E) = f^2 - f - 2\mathrm{Id}_E \qquad \text{car } f \text{ et } \mathrm{Id}_E \text{ commuttent.}$$

Or f vérifie $(\bigstar)$ donc

$$g \circ h = 0_{\mathscr{L}(E)}.$$

De même,

$$h \circ g = (f + \mathrm{Id}_E) \circ (f - 2\mathrm{Id}_E) = f^2 - f - 2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathscr{L}(E)}.$$

Conclusion,

$$\boxed{g \circ h = h \circ g = 0_{\mathscr{L}(E)}.}$$

17. Soit $x \in \text{Ker}(g) \cap \text{Ker}(h)$. Alors, $g(x) = 0_E$ et $h(x) = 0_E$ ou encore

$$\begin{cases} f(x) + x = 0_E \\ f(x) - 2x = 0_E \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 3x = 0_E \qquad L_1 \leftarrow L_1 - L_2$$
$$\Rightarrow \quad x = 0_E.$$

Donc $\text{Ker}(g) \cap \text{Ker}(h) \subseteq \{0_E\}$. Or $\{0_E\} \subseteq \text{Ker}(g) \cap \text{Ker}(h)$. Conclusion,

$$\boxed{\text{Ker}(g) \cap \text{Ker}(h) = \{0_E\} \qquad \text{i.e. Ker}(g) \text{ et Ker}(h) \text{ sont en somme directe.}}$$

18. On suppose dans cette question seulement que E est de dimension finie et non note $n = \dim(E)$.

    (a) Puisque E est de dimension finie égale à n, par le théorème du rang,

    $$\dim(\text{Ker}(g)) + \dim(\text{Ker}(h)) = n - \text{rg}(g) + \dim(\text{Ker}(h)).$$

    Or par la question 16. $h \circ g = 0_{\mathscr{L}(E)}$. Donc par la question 15. on en déduit que $\text{Im}(g) \subseteq \text{Ker}(h)$. En particulier, $\text{rg}(g) \leqslant \dim(\text{Ker}(h))$ i.e. $\dim(\text{Ker}(h)) - \text{rg}(g) \geqslant 0$. Conclusion,

    $$\boxed{\dim(\text{Ker}(g)) + \dim(\text{Ker}(h)) \geqslant n.}$$

    (b) Par la question 17. $\text{Ker}(g)$ et $\text{Ker}(h)$ sont en somme directe. Donc

    $$\dim(\text{Ker}(g) \oplus \text{Ker}(h)) = \dim(\text{Ker}(g)) + \dim(\text{Ker}(h)) \geqslant n.$$

    Or $\text{Ker}(g) \oplus \text{Ker}(h)$ est un sous-espace vectoriel de E donc $\dim(\text{Ker}(g) \oplus \text{Ker}(h)) \leqslant \dim(E) = n$. Ainsi,

    $$\dim(\text{Ker}(g) \oplus \text{Ker}(h)) = n = \dim(E).$$

    Or $\text{Ker}(g) \oplus \text{Ker}(h)$ est un sous-espace vectoriel de E. Conclusion,

    $$\boxed{\text{Ker}(g) \oplus \text{Ker}(h) = E \qquad \text{i.e. Ker}(g) \text{ et Ker}(h) \text{ sont supplémentaires dans } E.}$$

On revient à E de dimension quelconque et on suppose que $f \neq \text{Id}_E$. On pose

$$I : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathscr{L}(E) \\ P & \mapsto & P(f) \end{array}$$

On note alors $\mathbb{R}[f] = \text{Im}(I)$.

19. Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]$. Alors,

$$I(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P + \mu Q)(f) = \lambda P(f) + \mu Q(f) = \lambda I(P) + \mu I(Q).$$

Conclusion,

$$\boxed{I \text{ est linéaire.}}$$

De plus, par définition,

$$I\left(X^2 - X - 2\right) = f^2 - f - 2\text{Id}_E.$$

Or f vérifie $(\bigstar)$ Ainsi,

$$\boxed{I\left(X^2 - X - 2\right) = 0_{\mathscr{L}(E)}.}$$

20. On procède par récurrence double. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $\mathscr{P}(k)$: $f^k \in \text{Vect}\,(\text{Id}_E, f)$.

Initialisation. Si $k = 0$, alors $f^0 = \text{Id}_E \in \text{Vect}\,(\text{Id}_E, f)$. Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie. Si $k = 1$, alors $f^1 = f \in \text{Vect}\,(\text{Id}_E, f)$ donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(k)$ et $\mathscr{P}(k+1)$ et montrons que $\mathscr{P}(k+2)$ est vraie. On a

$$f^{k+2} = f^k \circ f^2 = f^k \circ (f + 2\text{Id}_E) = f^{k+1} + 2f^k \qquad \text{car } f \text{ vérifie } (\bigstar)$$

Or par hypothèse de récurrence, $f^k \in \text{Vect}\,(\text{Id}_E, f)$ et $f^{k+1} \in \text{Vect}\,(\text{Id}_E, f)$. De plus, $\text{Vect}\,(\text{Id}_E, f)$ est un espace vectoriel donc est stable par combinaisons linéaires. Donc $f^{k+2} = f^{k+1} + 2f^k \in \text{Vect}\,(\text{Id}_E, f)$. Ainsi, $\mathscr{P}(k+2)$ est vraie.

Conclusion, on en déduit bien que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(k)$ est vraie :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \qquad f^k \in \text{Vect}\,(f, \text{Id}_E)\,.}$$

21. On observe que $I\,(1) = \text{Id}_E$ et que $I\,(X) = f$. Ces deux applications ont donc chacune un antécédent par f. Conclusion,

$$\boxed{\text{Id}_E \in \mathbb{R}[f] \qquad \text{et} \qquad f \in \mathbb{R}[f].}$$

22. Par la question précédente, Id_E et f sont deux éléments de $\mathbb{R}[f] = \text{Im}\,(I)$. Donc

$$\text{Vect}\,(\text{Id}_E, f) \subseteq \mathbb{R}[f].$$

Réciproquement, soit $F \in \mathbb{R}[f] = \text{Im}\,(I)$. Alors, il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$F = I\,(P)\,.$$

Puisque $P \in \mathbb{R}[X]$, il existe $n \in \mathbb{N}$, $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. Ainsi, par linéarité de I,

$$F = I\,(P) = I\left(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\right) = \sum_{k=0}^{n} a_k f^k.$$

Par la question 20., pour tout $k \in [\![0; n]\!]$, $f^k \in \text{Vect}\,(\text{Id}_E, f)$ et $\text{Vect}\,(\text{Id}_E, f)$ est un espace vectoriel. Donc par stabilité par combinaisons linéaires, on en déduit que

$$F = \sum_{k=0}^{n} a_k f^k \in \text{Vect}\,(\text{Id}_E, f)\,.$$

Ceci étant vrai pour tout $F \in \mathbb{R}[f]$, on obtient que $\mathbb{R}[f] \subseteq \text{Vect}\,(\text{Id}_E, f)$. Conclusion,

$$\boxed{\text{Vect}\,(\text{Id}_E, f) = \mathbb{R}[f] \qquad \text{i.e.} \qquad (\text{Id}_E, f) \text{ est génératrice dans } \mathbb{R}[f].}$$

23. (a) Par définition,

$$\begin{cases} g = f - 2\text{Id}_E \\ h = f + \text{Id}_E. \end{cases}$$

Donc en faisant, $L_2 - L_1$, on obtient que

$$h - g = 3\text{Id}_E \qquad \Leftrightarrow \qquad \text{Id}_E = \frac{h-g}{3}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{Id}_E \in \text{Vect}\,(g, h)\,.}$$

(b) De la même façon, en faisant $L_1 + 2L_2$, on obtient que

$$g + 2h = 3f \qquad \Leftrightarrow \qquad f = \frac{g+2h}{3}.$$

Conclusion,

$$\boxed{f \in \mathrm{Vect}\,(g,h)\,.}$$

(c) Par les deux questions précédentes, on a $\mathrm{Vect}\,(\mathrm{Id}_E, f) \subseteq \mathrm{Vect}\,(g,h)$. Réciproquement, $g = f - 2\mathrm{Id}_E \in \mathrm{Vect}\,(\mathrm{Id}_E, f)$ et $h = f + \mathrm{Id}_E \in \mathrm{Vect}\,(\mathrm{Id}_E, f)$. Donc $\mathrm{Vect}\,(g,h) \subseteq \mathrm{Vect}\,(\mathrm{Id}_E, f)$. Donc $\mathrm{Vect}\,(\mathrm{Id}_E, f) = \mathrm{Vect}\,(g,h)$. Conclusion, par la question 22.

$$\boxed{\mathbb{R}[f] = \mathrm{Vect}\,(g,h)\,.}$$

24. On sait déjà par la question 17. que $\mathrm{Ker}\,(g) \oplus \mathrm{Ker}\,(h)$. Montrons que cette somme fait E. Puisque $\mathrm{Ker}\,(g) \oplus \mathrm{Ker}\,(h)$ est un sous-espace vectoriel de E, $\mathrm{Ker}\,(g) \oplus \mathrm{Ker}\,(h) \subseteq E$. Réciproquement, soit $x \in E$. Alors par la question 23.a

$$x = \mathrm{Id}_E(x) = \frac{h(x) - g(x)}{3}.$$

On note que $h(x) \in \mathrm{Im}\,(h)$ et $g(x) \in \mathrm{Im}\,(g)$. Or par la question 16. $g \circ h = h \circ g = 0_{\mathscr{L}(E)}$. Donc par la question 15. $\mathrm{Im}\,(h) \subseteq \mathrm{Ker}\,(g)$ et $\mathrm{Im}\,(g) \subseteq \mathrm{Ker}\,(h)$. Ainsi,

$$h(x) \in \mathrm{Ker}\,(g) \qquad \text{et} \qquad g(x) \in \mathrm{Ker}\,(h)\,.$$

Ainsi,

$$x = \frac{1}{3}h(x) - \frac{1}{3}g(x) \in \mathrm{Ker}\,(g) + \mathrm{Ker}\,(h)\,.$$

Ceci étant vrai pour $x \in E$ quelconque. On en déduit que $E \subseteq \mathrm{Ker}\,(g) + \mathrm{Ker}\,(h)$. D'où,

$$E = \mathrm{Ker}\,(g) + \mathrm{Ker}\,(h)\,.$$

Et puisque les deux espaces sont en somme directe, on conclut que

$$\boxed{\mathrm{Ker}\,(g) \oplus \mathrm{Ker}\,(h) = E.}$$

Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $p = \lambda\, g$ et $q = \mu h$.

25. Puisque g et h sont des endomorphismes, il en va de même pour p et q. Calculons p^2. On a

$$\begin{aligned}
p^2 = \lambda^2\, g^2 &= \lambda^2\,(f - 2\mathrm{Id}_E)^2 \\
&= \lambda^2\left(f^2 - 4f + 4\mathrm{Id}_E\right) && \text{car } f \text{ et } \mathrm{Id}_E \text{ commutent} \\
&= \lambda^2\,(f + 2\mathrm{Id}_E - 4f + 4\mathrm{Id}_E) && \text{car } f \text{ vérifie } (\bigstar) \\
&= \lambda^2\,(-3f + 6\mathrm{Id}_E) \\
&= -3\,\lambda^2\,(f - 2\mathrm{Id}_E) \\
&= -3\,\lambda^2\, g = -3\,\lambda\, p.
\end{aligned}$$

En particulier pour $\lambda = -\frac{1}{3}$, on obtient que $p^2 = p$ i.e. p est un projecteur. De même,

$$q^2 = \mu^2 h^2 = \mu^2\,(f + \mathrm{Id}_E)^2 = \mu^2\left(f^2 + 2f + \mathrm{Id}_E\right) = \mu^2\,(3f + 3\mathrm{Id}_E) = 3\mu q.$$

Donc en prenant $\mu = \frac{1}{3}$, on obtient $q^2 = q$. Conclusion,

$$\boxed{\text{pour } \lambda = -\frac{1}{3} \text{ et } \mu = \frac{1}{3}, \text{ alors } p \text{ et } q \text{ sont deux projecteurs de } E.}$$

26. On procède par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathscr{P}(n)$: « $f^n = (-1)^n p + 2^n q$ ».
Initialisation. Si $n = 0$, alors $f^0 = \mathrm{Id}_E$. D'autre part,
$$(-1)^0 p + 2^0 q = p + q = -\frac{1}{3}g + \frac{1}{3}h = -\frac{1}{3}(f - 2\mathrm{Id}_E) + \frac{1}{3}(f + \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Id}_E.$$
Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
Montrons également $\mathscr{P}(1)$ cela nous sera utile pour l'hérédité. Si $n = 1$, on a $f^1 = f$. D'autre part,
$$(-1)^1 p + 2^1 q = -p + 2q = \frac{1}{3}g + \frac{2}{3}h = \frac{1}{3}(f - 2\mathrm{Id}_E) + \frac{2}{3}(f + \mathrm{Id}_E) = f.$$
Donc $\mathscr{P}(1)$ est aussi vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie et montrons $\mathscr{P}(n+1)$. Par hypothèse de récurrence, $f^n = (-1)^n p + 2^n q$. De plus par l'initialisation, $\mathscr{P}(1)$ est vraie : $f = -p + 2q$. Donc
$$f^{n+1} = f \circ f^n = (-p + 2q) \circ ((-1)^n p + 2^n q) = (-1)^{n+1} p^2 - 2^n p \circ q + 2(-1)^n q \circ p + 2^{n+1} q^2.$$
Or
$$p \circ q = -\frac{g}{3} \circ \frac{h}{3} = -\frac{1}{9} g \circ h.$$
Donc par la question 16. $p \circ q = 0_{\mathscr{L}(E)}$. De même,
$$q \circ p = \frac{h}{3} \circ \left(-\frac{g}{3}\right) = -\frac{1}{9} h \circ g = 0_{\mathscr{L}(E)}.$$
Ainsi,
$$f^{n+1} = (-1)^{n+1} p^2 + 2^{n+1} q^2 = (-1)^{n+1} p + 2^{n+1} q \qquad \text{car } p \text{ et } q \text{ sont des projecteurs.}$$
Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie :
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad f^n = (-1)^n p + 2^n q.}$$

27. Si $n = -1$, on a
$$(-1)^n p + 2^n q = -p + \frac{1}{2}q = \frac{1}{3}g + \frac{1}{6}h = \frac{1}{3}(f - 2\mathrm{Id}_E) + \frac{1}{6}(f + \mathrm{Id}_E) = \frac{1}{2}f - \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E.$$
Or par la question 14. f^{-1} existe et $f^{-1} = \frac{f - \mathrm{Id}_E}{2}$. Conclusion,
$$\boxed{\text{la formule reste-elle vrai pour } n = -1 : f^{-1} = -p + \frac{1}{2}q.}$$

Exercice II - Dénombrement

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On considère une urne contenant N boules rouges, N boules oranges et N boules vertes. On suppose toutes les boules discernables et numérotées de 1 à N pour chaque couleur. On effectue $p \in [\![1; N]\!]$ tirages. On demande les résultats sous forme littérale et non nécessairement simplifiés.

1. On suppose les tirages successifs et avec remise.

   (a) Puisque les tirages sont successifs et avec remise, cela revient à construire un p-uplet avec $3N$ choix pour chaque tirage (car les boules sont toutes discernables). Ainsi, au total :
   $$\boxed{(3N)^p \text{ résultats possibles.}}$$

(b) On choisit la première boule : $3N$ possibilités. Une fois la première boule choisit, on ne peut pas prendre pour la deuxième boule, une boule de la même couleur : il nous reste donc $2N$ possibilités. Mais puisque les tirages sont avec remise, le même raisonnement est possible pour la troisième boule : on choisit parmi les $2N$ boules qui ne sont pas de la même couleur que le résultat de la deuxième boule. On répète ce processus $p-1$ fois donc au final :

$$\boxed{(3N)\times(2N)^{p-1} \text{ résultats possibles avec aucune boule de même couleur voisine.}}$$

2. On suppose que l'on tire les p boules simultanément. Soit $k \in [\![1;p]\!]$. Puisque la probabilité est uniforme sur chacune des boules, on compte le nombre de façons d'avoir obtenu k boules rouges. On pioche simultanément k boules rouges parmi les N possibles : $\binom{N}{k}$ puis l'on complète en piochant $p-k$ boules parmi les $3N$ « non-rouges » : $\binom{2N}{p-k}$. Au total

$$\binom{N}{k}\binom{2N}{p-k} \text{ façons.}$$

Or le nombre total de tirages est de $\binom{3N}{p}$. Donc la probabilité de piocher exactement k boules rouges est de :

$$\boxed{\frac{\binom{N}{k}\binom{2N}{p-k}}{\binom{3N}{p}}.}$$

3. On suppose les tirages successifs et sans remise.

(a) Soit $k \in [\![0;p]\!]$. On choisit les k boules rouges : $\binom{N}{k}$ choix. On choisit les $p-k$ boules non-rouges : $\binom{2N}{p-k}$. On ordonne alors les p boules obtenues $p!$ choix. Au total :

$$\boxed{\binom{N}{k}\binom{2N}{p-k}p! \text{ possibilités.}}$$

(b) Notons A l'ensemble des tirages avec au moins une boule rouge et A_k l'ensemble des tirages avec exactement k tirages. On observe que $A = \bigsqcup_{k\in[\![1;p]\!]} A_k$. Donc, l'union étant disjointe :

$$\mathrm{Card}\,(A) = \sum_{k=1}^{p} \mathrm{Card}\,(A_k)\,.$$

Par la question précédente, on conclut que

$$\boxed{\mathrm{Card}\,(A) = \sum_{k=1}^{p}\binom{N}{k}\binom{2N}{p-k}p!}$$

(c) On observe que $\overline{A}$ est l'ensemble des tirages avec aucune boule rouge. Pour obtenir aucune boule rouge il suffit de faire un tirage successif et sans remise parmi les $2N$ boules non-rouges : i.e. construire des arrangements de p boules parmi $2N$. Ainsi,

$$\mathrm{Card}\left(\overline{A}\right) = A_{2N}^{p}.$$

Or au total, on a A_{3N}^{p} tirages possibles. Conclusion, on obtient également,

$$\boxed{\mathrm{Card}\,(A) = A_{3N}^{p} - A_{2N}^{p}.}$$

Problème III - Probabilités

Soit $N \in \mathbb{N}$, $N \geqslant 2$. On considère une urne contenant N boules rouges et N boules vertes. On fixe $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé sur lequel sont définies toutes les variables aléatoires de ce problème. On effectue successivement des tirages uniformes dans l'urne avec le protocole suivant :

- Si l'on pioche une boule rouge, on la peint en vert et on la replace dans l'urne.
- Si l'on pioche une boule verte, on la remet dans l'urne sans changer sa couleur.

Au tirage $k \in \mathbb{N}^*$, on note X_k la variable aléatoire retournant 1 si la boule est rouge et 0 sinon.

Partie 1 : Lois initiales

1. L'univers image de X_1 est $X_1(\Omega) = \{0; 1\}$. Nécessairement, X_1 est une loi de Bernoulli. Déterminons son paramètre $p = \mathbb{P}(X_1 = 1)$. L'évènement $(X_1 = 1)$ correspond à avoir obtenu une boule rouge au premier tirage. Initialement, l'urne contient N boules rouges parmi les $2N$ boules. Le tirage étant uniforme, on obtient
$$p = \mathbb{P}(X_1 = 1) = \frac{N}{2N} = \frac{1}{2}.$$
Conclusion,
$$\boxed{X_1 \text{ est une loi de Bernoulli de paramètre } 1/2 : X_1 \sim \mathscr{B}(1/2).}$$

2. On cherche $\mathbb{P}(X_2 = 1 \mid X_1 = 1)$. On note que, par la question précédente, l'évènement $(X_1 = 1)$ n'est pas négligeable donc cette probabilité existe. Si l'on a obtenu une boule rouge au premier tirage, alors on l'a peinte en verte et donc à l'étape suivante l'urne possède $N-1$ boules rouges et $N+1$ boules vertes. Le tirage étant uniforme, on obtient donc
$$\mathbb{P}(X_2 = 1 \mid X_1 = 1) = \frac{N-1}{N-1+N+1} = \frac{N-1}{2N}.$$
Conclusion,
$$\boxed{\mathbb{P}(X_2 = 1 \mid X_1 = 1) = \frac{N-1}{2N}.}$$

3. On cherche la loi de X_2. Comme dans la question 1. l'univers image de X_2 est $X_2(\Omega) = \{0; 1\}$. Donc X_2 est une loi de Bernoulli. Calculons son paramètre $p = \mathbb{P}(X_2 = 1)$. La famille $((X_1 = 1), (X_1 = 0))$ forme un système complet d'évènements, donc par la formule des probabilités totales :
$$\mathbb{P}(X_2 = 1) = \mathbb{P}(X_2 = 1 \mid X_1 = 1)\mathbb{P}(X_1 = 1) + \mathbb{P}(X_2 = 1 \mid X_1 = 0)\mathbb{P}(X_1 = 0).$$
Par la question précédente, $\mathbb{P}(X_2 = 1 \mid X_1 = 1) = \frac{N-1}{2N}$. De même, si l'on a pioché une boule verte : $(X_1 = 0)$, alors la composition de l'urne n'a pas changé. Donc $\mathbb{P}(X_2 = 1 \mid X_1 = 0) = \frac{N}{2N} = \frac{1}{2}$. Enfin, par la question 1. $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(X_1 = 0) = 1 - \mathbb{P}(X_1 = 1) = \frac{1}{2}$. D'où,
$$\mathbb{P}(X_2 = 1) = \frac{N-1}{2N}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{N-1+N}{4N} = \frac{2N-1}{4N}.$$
Conclusion,
$$\boxed{X_2 \text{ est une loi de Bernoulli de paramètre } \frac{2N-1}{4N} : X_1 \sim \mathscr{B}\left(\frac{2N-1}{4N}\right).}$$

4. Par la question précédente, $\mathbb{P}(X_2=1)=\frac{2N-1}{4N}$. De plus, par la question 2. $\mathbb{P}(X_2=1 \mid X_1=1)=\frac{N-1}{2N}$. Ainsi,

$$\begin{array}{rcl}(X_1=1) \text{ et } (X_2=1) \text{ indépendants} & \Leftrightarrow & \mathbb{P}(X_2=1 \mid X_1=1)=\mathbb{P}(X_2=1) \\ & \Leftrightarrow & \dfrac{2N-1}{4N}=\dfrac{N-1}{2N} \\ & \Leftrightarrow & 2N-1=2N-2 \\ & \Leftrightarrow & -1=-2.\end{array}$$

La dernière assertion étant toujours fausse. On conclut que

$$\boxed{(X_1=1) \text{ et } (X_2=1) \text{ ne sont pas indépendants.}}$$

5. On cherche $\mathbb{P}(X_1=0 \mid X_2=1)$. Par la question 3. $\mathbb{P}(X_2=1)\neq 0$. Donc cette probabilité existe. De plus, par la formule de Bayes,

$$\mathbb{P}(X_1=0 \mid X_2=1)=\frac{\mathbb{P}(X_2=1 \mid X_1=0)\,\mathbb{P}(X_1=0)}{\mathbb{P}(X_2=1)}.$$

Toujours par la question 3. $\mathbb{P}(X_2=1)=\frac{2N-1}{4N}$. Par la question 1. $\mathbb{P}(X_1=0)=\frac{1}{2}$. Enfin, si l'on a pioché une boule verte i.e. $X_1=0$ alors la composition de l'urne n'a pas changé donc

$$\mathbb{P}(X_2=1 \mid X_1=0)=\frac{1}{2}.$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}(X_1=0 \mid X_2=1)=\frac{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}{\frac{2N-1}{4N}}=\frac{N}{2N-1}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{P}(X_1=0 \mid X_2=1)=\frac{N}{2N-1}.}$$

Partie 2 : Autour de la somme

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on note $S_n=\sum_{i=1}^{n} X_i$. On fixe $n\in[\![1;N-1]\!]$.

6. Puisque chaque X_i peut valoir 0 ou 1, au minimum tous les X_i sont nuls et dans ce cas $S_n=0$. Au contraire, au maximum tous les X_i sont égaux à 1 et dans ce cas $S_n=\sum_{i=1}^{n}1=n$. On note que cette configuration est possible car $n\leqslant N$. En effet, chaque boule rouge lorsqu'elle est tirée est peinte en verte, donc on ne peut pas tirer plus que N boules rouges. Comme le nombre de tirages n est plus petit que le nombre de boules rouges, il est toujours possible d'obtenir une boule rouge à chaque tirage. Conclusion,

$$\boxed{S_n(\Omega)=[\![0;n]\!].}$$

7. On observe que $(S_n=0)$ correspond à l'évènement $\left(\sum_{i=1}^{n} X_i=0\right)$ i.e. $(X_1=0)\cap(X_2=0)\cap\cdots\cap(X_n=0)$. Ainsi,

$$\boxed{(S_n=0) \text{ correspond à n'avoir obtenu que des boules vertes durant les } n \text{ premiers tirages.}}$$

Mathématiquement,

$$\boxed{(S_n=0)=\bigcap_{i\in[\![1;n]\!]}(X_i=0).}$$

Dès lors,

$$\mathbb{P}(S_n = 0) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in [\![1;n]\!]} (X_i = 0) \right).$$

Les tirages n'étant pas indépendants, on ne peut pas séparer directement les probabilités. Cependant par la formule des probabilités composées :

$$\mathbb{P}(S_n = 0) = \prod_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}\left(X_{i+1} = 0 \;\middle|\; \bigcap_{j \in [\![1;i]\!]} (X_j = 0) \right) \times \mathbb{P}(X_1 = 0).$$

Soit $i \in [\![1; n-1]\!]$. Si $\bigcap_{j \in [\![1;i]\!]} (X_j = 0)$ cela signifie que l'on a pioché que des boules vertes donc la composition de l'urne n'a pas changé. Ainsi, l'urne possède toujours N boules vertes et N boules rouges. Dans ce cas, la probabilité de piocher une boule verte au tirage $i+1$ est de

$$\mathbb{P}\left(X_{i+1} = 0 \;\middle|\; \bigcap_{j \in [\![1;i]\!]} (X_j = 0) \right) = \frac{1}{2}.$$

De plus on sait que $\mathbb{P}(X_1 = 0) = \frac{1}{2}$. Ainsi,

$$\mathbb{P}(S_n = 0) = \frac{1}{2} \times \prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2} = \frac{1}{2^n}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{P}(S_n = 0) = \frac{1}{2^n}.}$$

8. Soit $k \in [\![0; n]\!]$. On note qu'il est possible d'avoir pioché $k \leqslant n \leqslant N$ boules rouges durant les n premiers tirages donc $\mathbb{P}(S_n = k) \neq 0$. Si $S_n = k$ est réalisé cela signifie que l'on a tiré k boules rouges et donc $n-k$ boules vertes. Les boules vertes piochées ont été remises sans changement mais les k boules rouges sont devenues des boules vertes. Donc l'urne possède $N-k$ boules rouges et $N+k$ boules vertes et donc toujours un total de $N-k+N+k = 2N$ boules. La probabilité étant uniforme, celle de piocher une boule rouge au tirage suivant est donc de

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 1 \mid S_n = k) = \frac{N-k}{2N}.$$

Puisque $\mathbb{P}_{(S_n = k)}$ est une probabilité, on a

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 0 \mid S_n = k) = 1 - \mathbb{P}(X_{n+1} = 1 \mid S_n = k) = \frac{2N - N + k}{2N} = \frac{N+k}{2N}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{P}(X_{n+1} = 1 \mid S_n = k) = \frac{N-k}{2N} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(X_{n+1} = 0 \mid S_n = k) = \frac{N+k}{2N}.}$$

9. Soit $i \in [\![0; n]\!]$. Soit $j \in [\![0; n+1]\!]$, alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_{n+1} = j \mid S_n = i) &= \mathbb{P}(S_n + X_{n+1} = j \mid S_n = i) \\
&= \mathbb{P}(i + X_{n+1} = j \mid S_n = i) \\
&= \mathbb{P}(X_{n+1} = j - i \mid S_n = i).
\end{aligned}$$

Si $j-i\notin\{0;1\}$ i.e. $j<i$ ou $j>i+1$, alors $\mathbb{P}\left(X_{n+1}=j-i \mid S_n=i\right)=0$. Si $j=i$, par la question précédente,

$$\mathbb{P}\left(S_{n+1}=j \mid S_n=i\right)=\mathbb{P}\left(X_{n+1}=0 \mid S_n=i\right)=\frac{N+i}{2N}.$$

Si $j=i+1$, de même par la question précédente,

$$\mathbb{P}\left(S_{n+1}=j \mid S_n=i\right)=\mathbb{P}\left(X_{n+1}=1 \mid S_n=i\right)=\frac{N-i}{2N}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{P}\left(S_{n+1}=j \mid S_n=i\right)=\begin{cases}\frac{N+i}{2N} \text{ si } j=i\\ \frac{N-i}{2N} \text{ si } j=i+1\\ 0 \text{ sinon.}\end{cases}}$$

10. Soit $k\in[\![1;n]\!]$. Par la question 1. $(S_n=i)_{i\in[\![0;n]\!]}$ forme un système complet d'évènement. Donc par la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}\left(S_{n+1}=k\right)=\sum_{i=0}^{n}\mathbb{P}\left(S_{n+1}=k \mid S_n=i\right)\mathbb{P}\left(S_n=i\right).$$

Donc par la question précédente, en prenant $j=k$, on a si $i\neq j=k$ et $i\neq j-1=k-1$ $\mathbb{P}\left(S_{n+1}=k \mid S_n=i\right)=0$:

$$\mathbb{P}\left(S_{n+1}=k\right)=0+\mathbb{P}\left(S_{n+1}=k \mid S_n=k-1\right)\mathbb{P}\left(S_n=k-1\right)+\mathbb{P}\left(S_{n+1}=k \mid S_n=k\right)\mathbb{P}\left(S_n=k\right)+0.$$

Toujours par la question précédente, si $i=k=j$, on a $\mathbb{P}\left(S_{n+1}=k \mid S_n=k\right)=\frac{N+k}{2N}$ et si $i=j-1=k-1$, $\mathbb{P}\left(S_{n+1}=k \mid S_n=k-1\right)=\frac{N-(k-1)}{2N}=\frac{N-k+1)}{2N}$. Conclusion,

$$\boxed{\forall k\in[\![1;n]\!],\qquad \mathbb{P}\left(S_{n+1}=k\right)=\frac{N-k+1}{2N}\mathbb{P}\left(S_n=k-1\right)+\frac{N+k}{2N}\mathbb{P}\left(S_n=k\right).}$$

On admet/vérifie facilement que la formule reste vraie pour $k=0$ ou $k=n+1$.

Partie 3 : Comportement asymptotique de l'espérance

On pose pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k\mathbb{P}\left(S_n=k\right)$.

Le nombre u_n correspond au nombre moyen de boules blanches obtenues durant n tirages.

11. Soit $n\in[\![1;N-1]\!]$. En sommant le résultat de la question précédente entre 1 et $n+1$:

$$\sum_{k=1}^{n+1}k\mathbb{P}\left(S_{n+1}=k\right)=\sum_{k=1}^{n+1}k\frac{N-k+1}{2N}\mathbb{P}\left(S_n=k-1\right)+\sum_{k=1}^{n+1}k\frac{(N+k)}{2N}\mathbb{P}\left(S_n=k\right).$$

On effectue alors le glissement d'indice $\tilde{k}=k-1$ dans la première somme :

$$\sum_{k=1}^{n+1}k\mathbb{P}\left(S_{n+1}=k\right)=\sum_{k=0}^{n}(k+1)\frac{N-(k+1)+1}{2N}\mathbb{P}\left(S_n=k\right)+\sum_{k=1}^{n+1}k\frac{(N+k)}{2N}\mathbb{P}\left(S_n=k\right).$$

Conclusion, pour tout $n\in[\![1;N-1]\!]$,

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n+1}k\mathbb{P}\left(S_{n+1}=k\right)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(k+1)(N-k)}{2N}\mathbb{P}\left(S_n=k\right)+\sum_{k=1}^{n+1}\frac{k(N+k)}{2N}\mathbb{P}\left(S_n=k\right).}$$

12. Soit $n \in [\![1; N-1]\!]$. Par définition,

$$u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} k\mathbb{P}(S_{n+1} = k) = 0 + \sum_{k=1}^{n+1} k\mathbb{P}(S_{n+1} = k).$$

Donc par la question précédente,

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(k+1)(N-k)}{2N}\mathbb{P}(S_n = k) + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{k(N+k)}{2N}\mathbb{P}(S_n = k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{(k+1)(N-k)}{2N}\mathbb{P}(S_n = k) + \sum_{k=0}^{n} \frac{k(N+k)}{2N}\mathbb{P}(S_n = k) \\
&\qquad + \frac{(n+1)(N+n+1)}{2N}\mathbb{P}(S_n = n+1) - 0 \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{kN - k^2 + N - k + kN + k^2}{2N}\mathbb{P}(S_n = k) + 0 \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{k(2N-1) + N}{2N}\mathbb{P}(S_n = k) \\
&= \frac{2N-1}{2N} \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(S_n = k) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(S_n = k).
\end{aligned}$$

Or $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(S_n = k) = u_n$ et $\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(S_n = k) = 1$ car $(S_n = k)_{k \in [\![0;n]\!]}$ forme un système complet. Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in [\![1; N-1]\!], \qquad u_{n+1} = \frac{2N-1}{2N}u_n + \frac{1}{2}.}$$

On admet que cette formule reste vraie pour $n \geqslant N$.

13. Puisque N est fixé, on observe que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite arithmético-géométrique. Soit $\omega \in \mathbb{R}$. On a

$$\omega = \frac{2N-1}{2N}\,\omega + \frac{1}{2} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{2N - 2N + 1}{2N}\,\omega = \frac{1}{2} \qquad \Leftrightarrow \qquad \omega = \frac{2N}{2} = N.$$

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = u_n - \omega = u_n - N$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
v_{n+1} = u_{n+1} - N &= \frac{2N-1}{2N}u_n + \frac{1}{2} - N \\
&= \frac{2N-1}{2N}(v_n + N) + \frac{1}{2} - N \\
&= \frac{2N-1}{2N}v_n + \frac{2N-1}{2} + \frac{1}{2} - N \\
&= \frac{2N-1}{2N}v_n.
\end{aligned}$$

Donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{2N-1}{2N}$. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = v_n + N = \left(\frac{2N-1}{2N}\right)^{n-1} v_1 + N = \left(\frac{2N-1}{2N}\right)^{n-1} (u_1 - N) + N.$$

Or

$$u_1 = 0 \times \mathbb{P}(S_1 = 0) + 1 \times \mathbb{P}(S_1 = 1) = \mathbb{P}(S_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 1) = \frac{1}{2}.$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = \left(\frac{2N-1}{2N}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{2} - N\right) + N = N - \left(\frac{2N-1}{2N}\right)^{n-1}\frac{2N-1}{2} = N - N\left(\frac{2N-1}{2N}\right)^{n}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = N\left[1 - \left(\frac{2N-1}{2N}\right)^n\right].}$$

14. Puisque $2N - 1 < 2N$, on a $0 \leqslant \frac{2N-1}{2N} < 1$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{2N-1}{2N}\right)^n = 0$. Conclusion,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = N.}$$

Asymptotiquement, le nombre moyen de boules rouges tirées est de N, cela est cohérent car chaque boule rouge ne peut être tirée qu'une seule fois avant de devenir verte. Donc on ne peut piocher au maximum que N boules rouges. De plus si l'on pioche un nombre infini de fois, on finira bien par toutes les avoir piochées dans ce cas, on s'attend bien à ce que S_n stationne à N systématiquement et donc notamment en moyenne.