Epreuve de mathématiques 9
2021-2022

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé
Durée : 2h30

Encadrer les résultats et numéroter les copies

Problème 1 - Intégration

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose
$$\varphi(x) = \int_{\sqrt{x}}^{x} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

1. Justifier que φ est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Sans calculer sa dérivée, déterminer le signe de φ sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer que φ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et préciser sa dérivée.
4. Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi\left(\frac{1}{x}\right) = \varphi(x)$.
5. Soit $x \geqslant 1$.
   (a) Montrer que
   $$\frac{\ln(x)}{2}\left(\arctan(x) - \arctan\left(\sqrt{x}\right)\right) \leqslant \varphi(x) \leqslant \ln(x)\left(\arctan(x) - \arctan\left(\sqrt{x}\right)\right).$$
   (b) Rappeler sans démonstration le lien entre $\arctan(x)$ et $\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.
   (c) En déduire la limite de φ en $+\infty$.
   (d) En déduire la limite de φ en 0.

On fixe $x \in]0;1[$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose
$$I_k(x) = \int_x^{\sqrt{x}} \frac{(1-t)^k}{k\left(1+t^2\right)}\,\mathrm{d}t.$$

6. Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $I_k(x)$ est bien définie.
7. Montrer que $\left(I_k(x)\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.
8. Montrer que $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}^*} I_k(x)$ converge.
9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $t \in]0;1[$,
   $$\left|\ln(t) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(1-t)^k}{k}\right| \leqslant \frac{1}{n+1}\left(\frac{1-t}{t}\right)^{n+1}.$$
10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire que pour tout $x \in]0;1[$,
   $$\left|\varphi(x) - \sum_{k=1}^{n} I_k(x)\right| \leqslant \int_x^{\sqrt{x}} \left(\frac{1-t}{t}\right)^{n+1}\mathrm{d}t.$$
11. Conclure que pour tout $x \in \left[\frac{2}{3};1\right[$,
   $$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} I_k(x).$$

Problème 2 - Représentation matricielle

Soit

$$G = \left\{ M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \beta \\ \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \beta & \alpha \end{pmatrix} \middle| (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

On cherche l'ensemble des matrices M de G unipotente d'ordre 2022 i.e. vérifiant $M^{2022} = I_3$.
On définit sur $\mathbb{R}_2[X]$, l'application f par

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \qquad f(P) = P(1)\left(1 + X + X^2\right) - P.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

On considère $\mathscr{C} = (1, X, X^2)$, $\mathscr{B}_1 = (1, X^2 + X, X^2 - X + 1)$ et on pose

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Déterminer $A = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(f)$ et vérifier que $A \in G$.
4. Montrer que $\mathscr{B}_1$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ et calculer $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_1}(\mathscr{C})$.
5. Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ tel que $B = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_1}(g)$. Calculer $g(X^2 - X + 1)$.
6. Calculer $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_1}(f)$. Que peut-on en déduire sur f et g ?
7. Vérifier alors le résultat de la question 5.
8. Ceci est la question 8.
9. Calculer le rang de $A - 2I_3$.
10. En déduire le noyau de $A - 2I_3$ puis $\mathrm{Ker}\left(f - 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_2[X]}\right)$.
11. Calculer le noyau de $A + I_3$ puis en déduire $\mathrm{Ker}\left(f + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_2[X]}\right)$.
12. Montrer qu'il existe $\mathscr{B}_2$ une base de $\mathbb{R}_2[X]$ que l'on précisera telle que $D = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_2}(f)$.
13. Préciser une relation matricielle entre A, D et P une matrice que l'on précisera.

Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \beta \\ \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \beta & \alpha \end{pmatrix} \in G$.

14. Déterminer une écriture de M en fonction de A et I_3.
15. Montrer que $M^{2022} = I_3$ si et seulement si $(\alpha I_3 + \beta D)^{2022} = I_3$.
16. En déduire les valeurs de α et β telles que M soit unipotente d'ordre 2022.