Corrigé du Devoir Surveillé 9
Intégration et représentation matricielle

Problème I - Intégration

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose

$$\varphi(x) = \int_{\sqrt{x}}^{x} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Alors, $\sqrt{x}$ existe et de plus, $[\sqrt{x}; x] \subseteq \mathbb{R}_+^*$. Or la fonction $t \mapsto \frac{\ln(t)}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et donc notamment sur $[\sqrt{x}; x]$. Dès lors, $\displaystyle\int_{\sqrt{x}}^{x} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ existe i.e. $\varphi(x)$ existe. Ceci étant vrai pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ quelconque. On en déduit que

$$\boxed{\varphi \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. *Premier cas :* $x \geqslant 1$. Alors on a $1 \leqslant \sqrt{x} \leqslant x$. Donc pour tout $t \in [\sqrt{x}; x]$, on a $t \geqslant 1$ et par suite $\ln(t) \geqslant 0$. Or $1 + t^2 > 0$. Donc

$$\forall t \in \left[\sqrt{x}; x\right], \qquad \frac{\ln(t)}{1+t^2} \geqslant 0.$$

De plus, re-précisons que $\sqrt{x} \leqslant x$ i.e. les bornes de l'intégrale sont dans le bon sens. Donc par croissance de l'intégrale :

$$\varphi(x) = \int_{\sqrt{x}}^{x} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \geqslant 0.$$

Second cas : $x \in \,]0; 1]$. Alors $x \leqslant \sqrt{x} \leqslant 1$. Donc pour tout $t \in [\sqrt{x}; x]$, $t \leqslant 1$ et donc

$$\frac{\ln(t)}{1+t^2} \leqslant 0.$$

Donc par croissance de l'intégrale, car $x \leqslant \sqrt{x}$, on obtient

$$\int_{x}^{\sqrt{x}} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad -\int_{\sqrt{x}}^{x} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad -\varphi(x) \leqslant 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \varphi(x) \geqslant 0.$$

Dans tous les cas, on obtient que

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \varphi(x) \geqslant 0.}$$

3. Soit $f : t \mapsto \frac{\ln(t)}{1+t^2}$. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc par le théorème fondamental de l'analyse,

$$F : \qquad x \mapsto \int_{1}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

est l'unique primitive de f s'annulant en 1. Notamment F est dérivable et $F' = f$. Or la fonction f est continue mais aussi $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de fonctions qui le sont. Donc F' est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et donc F est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$. D'autre part, toujours par la relation de Chasles, on observe que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \varphi(x) = \int_{\sqrt{x}}^{x} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = F(x) - F\left(\sqrt{x}\right).$$

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (pas en 0 bien sûr mais ici 0 est exclu). Donc par différence et composée de fonctions $\mathscr{C}^\infty$, on en déduit que φ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus,

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \varphi'(x) &= F'(x) - \frac{1}{2\sqrt{x}} F'\left(\sqrt{x}\right)\\ &= f(x) - \frac{f\left(\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}}\\ &= \frac{\ln(x)}{1+x^2} - \frac{\ln\left(\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}\,(1+x)}\\ &= \frac{\ln(x)}{1+x^2} - \frac{\ln(x)}{4\sqrt{x}\,(1+x)}.\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\varphi \text{ est } \mathscr{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \text{ et } \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \varphi'(x) = \frac{\ln(x)}{1+x^2} - \frac{\ln(x)}{4\sqrt{x}\,(1+x)}.}$$

4. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a
$$\varphi\left(\frac{1}{x}\right) = \int_{1/\sqrt{x}}^{\frac{1}{x}} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$
Posons $s = \frac{1}{t}$ i.e. $t = \frac{1}{s}$. Alors, $\mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{d}s}{s^2}$. Ainsi,
$$\varphi\left(\frac{1}{x}\right) = \int_{\sqrt{x}}^{x} \frac{\ln(1/s)}{1+\frac{1}{s^2}} \times \frac{-1}{s^2}\,\mathrm{d}s = \int_{\sqrt{x}}^{x} \frac{\ln(s)}{s^2+1}\,\mathrm{d}s = \varphi(x).$$
Conclusion,
$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \varphi\left(\frac{1}{x}\right) = \varphi(x).}$$

5. Soit $x \geqslant 1$.

   (a) On a $\sqrt{x} \leqslant x$. Donc par croissance de l'intégrale, on a
   $$\forall t \in \left[\sqrt{x}; x\right], \qquad \ln\left(\sqrt{x}\right) = \frac{\ln(x)}{2} \leqslant \ln(t) \leqslant \ln(x).$$
   Donc
   $$\forall t \in \left[\sqrt{x}; x\right], \qquad \frac{\ln(x)}{2}\frac{1}{1+t^2} \leqslant \frac{\ln(t)}{1+t^2} \leqslant \ln(x)\frac{1}{1+t^2} \qquad \text{car } 1+t^2 > 0.$$
   Par croissance de l'intégrale, car $\sqrt{x} \leqslant x$ (donc les bornes sont dans le bon sens),
   $$\begin{aligned}&\int_{\sqrt{x}}^{x} \frac{\ln(x)}{2}\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \varphi(x) \leqslant \int_{\sqrt{x}}^{x} \ln(x)\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\\ \Leftrightarrow \qquad &\frac{\ln(x)}{2}\int_{\sqrt{x}}^{x} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \varphi(x) \leqslant \ln(x)\int_{\sqrt{x}}^{x} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$
   Or
   $$\int_{\sqrt{x}}^{x} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = [\arctan(t)]_{t=\sqrt{x}}^{t=x} = \arctan(x) - \arctan\left(\sqrt{x}\right).$$
   Finalement, on obtient bien que
   $$\boxed{\frac{\ln(x)}{2}\left(\arctan(x) - \arctan\left(\sqrt{x}\right)\right) \leqslant \varphi(x) \leqslant \ln(x)\left(\arctan(x) - \arctan\left(\sqrt{x}\right)\right).}$$

(b) Un petit cadeau au passage, merci qui ? Puisque $x \geqslant 1 > 0$ (important car la relation est différente sur $\mathbb{R}_-^*$), on sait que

$$\boxed{\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.}$$

(c) Pour tout $x \geqslant 1$, on a

$$\arctan(x) - \arctan\left(\sqrt{x}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) - \arctan\left(\frac{1}{x}\right).$$

Or $\arctan(u) \underset{u\to 0}{=} u + o(u)$. Donc en prenant $u = \frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $u = \frac{1}{\sqrt{x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on obtient que

$$\arctan(x) - \arctan\left(\sqrt{x}\right) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{\sqrt{x}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Or $\frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\ll} \frac{1}{\sqrt{x}}$. Donc

$$\arctan(x) - \arctan\left(\sqrt{x}\right) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{\sqrt{x}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Par suite,

$$\ln(x)\left(\arctan(x) - \arctan\left(\sqrt{x}\right)\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}.$$

Or par croissance comparée, on a

$$\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi,

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x)\left(\arctan(x) - \arctan\left(\sqrt{x}\right)\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{2}\left(\arctan(x) - \arctan\left(\sqrt{x}\right)\right) = 0.$$

Donc par les inégalités de la question 5.a et le théorème d'encadrement, on conclut que

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0.}$$

(d) Par la question 4. pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi(x) = \varphi\left(\frac{1}{x}\right)$. Donc par le changement de variable $u = \frac{1}{x}$,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \varphi(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \varphi\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{u\to+\infty} \varphi(u).$$

Donc par la question précédente,

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \varphi(x) = 0.}$$

On fixe $x \in]0;1[$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$I_k(x) = \int_x^{\sqrt{x}} \frac{(1-t)^k}{k\left(1+t^2\right)}\,\mathrm{d}t.$$

6. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, alors la fonction $t \mapsto \frac{(1-t)^k}{k(1+t^2)}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[x;\sqrt{x}]$. Conclusion,

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad I_k(x) \text{ existe.}}$$

7. Puisque $x \in]0;1[$, on a $0 < x \leqslant \sqrt{x} < 1$. Pour tout $t \in]x;\sqrt{x}[$, on a $t \in]0;1[$, donc $0 \leqslant 1-t \leqslant 1$ et $0 < \frac{1}{1+t^2} \leqslant 1$. Donc
$$0 \leqslant \frac{(1-t)^k}{k\,(1+t^2)} \leqslant \frac{1}{k}.$$
Dès lors, par croissance de l'intégrale, car $x \leqslant \sqrt{x}$ (les bornes sont dans le bon sens) on obtient
$$0 \leqslant I_k(x) = \int_x^{\sqrt{x}} \frac{(1-t)^k}{k\,(1+t^2)}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^{\sqrt{x}} \frac{1}{k}\,\mathrm{d}t = \frac{x-\sqrt{x}}{k} \leqslant \frac{x}{k} \leqslant \frac{1}{k}.$$
Naturellement $\frac{1}{k} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc par encadrement, on en déduit que
$$\boxed{\lim_{k\to+\infty} I_k(x) = 0.}$$

8. Par la question précédente, on observe que la série $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} I_k(x)$ ne diverge pas grossièrement mais notre majorant en $1/k$ ne nous permet pas de conclure (la série harmonique ne converge pas). On va montrer malgré tout la convergence et pour ce faire, nous allons améliorer notre majoration. Pour tout $t \in [x;\sqrt{x}]$, on a
$$0 \leqslant \frac{(1-t)^k}{k\,(1+t^2)} \leqslant \frac{(1-t)^k}{k}.$$
Donc par la croissance de l'intégrale, car $x \leqslant \sqrt{x}$,
$$0 \leqslant I_k(x) \leqslant \int_x^{\sqrt{x}} \frac{(1-t)^k}{k}\,\mathrm{d}t.$$
Or
$$\int_x^{\sqrt{x}} \frac{(1-t)^k}{k}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{(1-t)^{k+1}}{(k+1)\,k}\right]_{t=\sqrt{x}}^{t=x} = \frac{(1-x)^{k+1}}{(k+1)\,k} - \frac{(1-\sqrt{x})^{k+1}}{(k+1)\,k} \leqslant \frac{(1-x)^{k+1}}{(k+1)\,k} \leqslant \frac{1}{k\,(k+1)} \leqslant \frac{1}{k^2}.$$
Donc
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad 0 \leqslant I_k(x) \leqslant \frac{1}{k^2}.$$
Or la série $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{k^2}$ converge en tant que série de Riemann d'exposant $\alpha = 2 > 1$. Conclusion, par le théorème de comparaison des séries à termes positifs,
$$\boxed{\sum_{k\in\mathbb{N}^*} I_k(x) \text{ converge.}}$$

9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in]0;1[$. La fonction ln est $\mathscr{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et donc sur $]t;1[$. Donc par la formule de Taylor-Lagrange,
$$\left|\ln(t) - \sum_{k=0}^{n} \ln^{(k)}(1)\frac{(t-1)^k}{k!}\right| \leqslant \sup_{s\in[t;1]} \left|\ln^{(n+1)}(s)\right| \frac{|t-1|^{n+1}}{(n+1)!}$$
Or pour tout $s \in \mathbb{R}_+^*$,
$$\ln'(s) = \frac{1}{s}, \qquad \ln''(s) = -\frac{1}{s^2}, \qquad \ln^{(3)}(s) = \frac{2}{s^3}, \qquad \ln^{(4)}(s) = -\frac{6}{s^4}.$$
Par récurrence, on obtient pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,
$$\forall s \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \ln^{(k)}(s) = (-1)^{k+1}\frac{(k-1)!}{s^k}.$$

D'où
$$\left|\ln(t)-\ln(1)-\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}(k-1)!\frac{(t-1)^k}{k!}\right| \leqslant \sup_{s\in[t;1]}\left|(-1)^{k+1}\frac{(k-1)!}{s^{n+1}}\right|\frac{|t-1|^{n+1}}{(n+1)!}.$$
Or pour tout $s\in[t;1]$, $0<\frac{1}{s^{n+1}}\leqslant\frac{1}{t^{n+1}}$. Donc
$$\left|\ln(t)-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}(t-1)^k}{k}\right|\leqslant\frac{(k-1)!}{t^{n+1}}\frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{1}{n+1}\left(\frac{1-t}{t}\right)^{n+1}$$
Conclusion,
$$\boxed{\forall t\in\,]0;1[\,,\qquad \left|\ln(t)+\sum_{k=1}^{n}\frac{(1-t)^k}{k}\right|\leqslant\frac{1}{n+1}\left(\frac{1-t}{t}\right)^{n+1}.}$$

10. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Soit $x\in\,]0;1[$. Par la question précédente, on a
$$\forall t\in\,]0;1[\,,\qquad \left|\frac{\ln(t)}{1+t^2}+\sum_{k=1}^{n}\frac{(1-t)^k}{k\left(1+t^2\right)}\right|\leqslant\frac{1}{(n+1)\left(1+t^2\right)}\left(\frac{1-t}{t}\right)^{n+1}\leqslant\left(\frac{1-t}{t}\right)^{n+1}.$$
Donc par l'inégalité triangulaire puis la croissance de l'intégrale, car $x\leqslant\sqrt{x}$, on a
$$\begin{aligned}
&\left|\int_x^{\sqrt{x}}\frac{\ln(t)}{1+t^2}+\sum_{k=1}^{n}\frac{(1-t)^k}{k\left(1+t^2\right)}\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_x^{\sqrt{x}}\left|\frac{\ln(t)}{1+t^2}+\sum_{k=1}^{n}\frac{(1-t)^k}{k\left(1+t^2\right)}\right|\mathrm{d}t\\
\Leftrightarrow\quad&\left|\int_x^{\sqrt{x}}\frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t+\sum_{k=1}^{n}\int_x^{\sqrt{x}}\frac{(1-t)^k}{k\left(1+t^2\right)}\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_x^{\sqrt{x}}\left(\frac{1-t}{t}\right)^{n+1}\mathrm{d}t\\
\Leftrightarrow\quad&\left|-\varphi(x)+\sum_{k=1}^{n}I_k(x)\right|\leqslant\int_x^{\sqrt{x}}\left(\frac{1-t}{t}\right)^{n+1}\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$
Conclusion,
$$\boxed{\forall x\in\,]0;1[\,,\qquad \left|\varphi\left(x\right)-\sum_{k=1}^{n}I_k(x)\right|\leqslant\int_x^{\sqrt{x}}\left(\frac{1-t}{t}\right)^{n+1}\mathrm{d}t.}$$

11. Soit $x\in\left]\frac{2}{3};1\right[$. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On a alors pour tout $t\in[x;\sqrt{x}]\subseteq\left[\frac{2}{3};1\right]$,
$$0\leqslant\frac{1-t}{t}=\frac{1}{t}-1\leqslant\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}.$$
Donc $0\leqslant\left(\frac{1-t}{t}\right)^{n+1}\leqslant\frac{1}{2^{n+1}}$. Par croissance de l'intégrale, car $\sqrt{x}\leqslant x$,
$$0\leqslant\int_x^{\sqrt{x}}\left(\frac{1-t}{t}\right)^{n+1}\mathrm{d}t\leqslant\frac{\left(\sqrt{x}-x\right)}{2^{n+1}}\leqslant\frac{1}{2^{n+1}}.$$
Ainsi,
$$\lim_{n\to+\infty}\int_x^{\sqrt{x}}\left(\frac{1-t}{t}\right)^{n+1}\mathrm{d}t=0.$$
Donc par le théorème d'encadrement et la question précédente, on en déduit que
$$\lim_{n\to+\infty}\left|\varphi\left(x\right)-\sum_{k=1}^{n}I_k(x)\right|=0.$$
On retrouve donc que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}I_n(x)$ converge mais on obtient ici en plus sa somme totale :
$$\boxed{\forall x\in\left[\frac{2}{3};1\right[,\qquad \varphi\left(x\right)=\sum_{k=1}^{+\infty}I_k(x).}$$

Problème II - Représentation matricielle

Soit
$$G = \left\{ M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \beta \\ \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \beta & \alpha \end{pmatrix} \middle| (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

On cherche l'ensemble des matrices M de G unipotente d'ordre 2022 i.e. vérifiant $M^{2022} = I_3$.
On définit sur $\mathbb{R}_2[X]$, l'application f par

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \qquad f(P) = P(1)\left(1 + X + X^2\right) - P.$$

1. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$, alors $f(P)$ existe et est un polynôme. De plus $\deg(P) \leqslant 2$ et donc

$$\deg(f(P)) = \deg\left(P(1)\left(1+X+X^2\right) - P\right) \leqslant \max\left(\deg\left(P(1)\left(1+X+X^2\right)\right), \deg(-P)\right) \leqslant 2.$$

Donc $f(P) \in \mathbb{R}_2[X]$. Ainsi, on a bien vérifié que f va de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}_2[X]$. Montrons maintenant que f est linéaire. Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $(P, Q) \in \mathbb{R}_2[X]$. On a

$$\begin{aligned} f(\lambda P + \mu Q) &= (\lambda P + \mu Q)(1)\left(1+X+X^2\right) - \lambda P - \mu Q \\ &= \lambda P(1)\left(1+X+X^2\right) - \lambda P + \mu Q(1)\left(1+X+X^2\right) - \mu Q \\ &= \lambda f(P) + \mu f(Q). \end{aligned}$$

Donc f est linéaire. Conclusion,

$$\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_2[X] : \qquad f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_2[X]).}$$

2. Déterminons le noyau de f. Soit $P \in \mathrm{Ker}(f)$. Alors

$$f(P) = P(1)\left(1+X+X^2\right) - P = 0_{\mathbb{R}_2[X]} \qquad \Leftrightarrow \qquad P = P(1)\left(1+X+X^2\right).$$

En évaluant en 1, on a $P(1) = 3P(1)$ i.e. $P(1) = 0_{\mathbb{R}}$. Donc

$$P = 0 \times \left(1+X+X^2\right) = 0_{\mathbb{R}_2[X]}.$$

Ainsi, $\mathrm{Ker}(f) \subseteq \left\{0_{\mathbb{R}_2[X]}\right\}$. Or $\left\{0_{\mathbb{R}_2[X]}\right\} \subseteq \mathrm{Ker}(f)$. Donc

$$\mathrm{Ker}(f) = \left\{0_{\mathbb{R}_2[X]}\right\}.$$

Donc f est injective. Or f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3 < +\infty$. Donc par la caractérisation des isomorphismes en dimension finie, on en déduit que f est bijective. Donc f est un endomorphisme bijectif. Conclusion,

$$\boxed{f \text{ est un automorphisme de } \mathbb{R}_2[X] : \qquad f \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}_2[X]).}$$

On considère $\mathscr{C} = \left(1, X, X^2\right)$, $\mathscr{B}_1 = \left(1, X^2 + X, X^2 - X + 1\right)$ et on pose

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Calculons les images de $\mathscr{C}$ par f. On a

$$\begin{aligned} f(1) &= 1 + X + X^2 - 1 = X + X^2 \\ f(X) &= 1 + X + X^2 - X = 1 + X^2 \\ f\left(X^2\right) &= 1 + X + X^2 - X^2 = 1 + X. \end{aligned}$$

On en déduit donc que

$$\boxed{A = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.}$$

Donc en prenant $\alpha = 0$ et $\beta = 1$, on observe directement

$$\boxed{A \in G.}$$

4. Calculons par exemple le rang de $\mathscr{B}_1$. On a

$$\mathrm{rg}(\mathscr{B}_1) = \mathrm{rg}\left(1, X^2+X, X^2-X+1\right) = \mathrm{rg}\left(1, X^2+X, 1-2X\right) \qquad C_3 \leftarrow C_3 - C_2.$$

Posons $\mathscr{B}_1' = \left(1, X^2+X, X^2-X+1\right)$. Cette famille étant une famille de polynômes de degrés distincts, on en déduit que $\mathscr{B}_1'$ est libre. Donc

$$\mathrm{rg}(\mathscr{B}_1) = \mathrm{rg}\left(\mathscr{B}_1'\right) = \mathrm{Card}\left(\mathscr{B}_1'\right) = 3.$$

Donc $\mathrm{rg}(\mathscr{B}_1) = \mathrm{Card}(\mathscr{B}_1)$ donc $\mathscr{B}_1$ est libre et $\mathrm{rg}(\mathscr{B}_1) = \dim(\mathbb{R}_2[X])$ donc $\mathscr{B}_1$ est génératrice. Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{B}_1 \text{ est une base de } \mathbb{R}_2[X].}$$

Posons $P = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(\mathscr{B}_1)$. On a

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On cherche $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_1}(\mathscr{C}) = P^{-1}$. Par l'algorithme de Gauss-Jordan :

$$\begin{array}{lcr}
P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} & & I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & L_3 \leftarrow \frac{L_3 - L_2}{2} & \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \end{array} & \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}
\end{array}$$

Puisque $P \underset{\mathscr{L}}{\sim} I_3$, on retrouve que P est inversible i.e. $\mathscr{B}_1$ est une base (nous aurions pu nous contenter de ce calcul d'ailleurs pour le démontrer). De plus,

$$\boxed{\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_1}(\mathscr{C}) = P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.}$$

Naturellement nous avions vérifié notre résultat :

$$PP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = I_3 \text{ } \mathit{OK\,!}$$

5. Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ canoniquement associé à B. On observe que $X^2 - X + 1$ est le troisième vecteur de la base $\mathscr{B}_1$. Donc

$$\operatorname{mat}_{\mathscr{B}_1}\left(1 - X + X^2\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Donc par la formule $Y = BX$, on obtient que

$$\operatorname{mat}_{\mathscr{B}_1}\left(g\left(1 - X + X^2\right)\right) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Par conséquent,

$$g\left(1 - X + X^2\right) = 1 \times 1 + 1 \times \left(X^2 + X\right) - 1 \times \left(X^2 - X + 1\right) = 2X.$$

Conclusion,

$$\boxed{g\left(1 - X + X^2\right) = 2X.}$$

6. Par la formule que nous connaissons que trop bien, avec les notations précédentes, on a

$$\operatorname{mat}_{\mathscr{B}_1}(f) = P^{-1}AP.$$

Donc par les questions précédentes

$$\begin{aligned}
\operatorname{mat}_{\mathscr{B}_1}(f) &= P^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = B
\end{aligned}$$

On observe donc $\operatorname{mat}_{\mathscr{B}_1}(f) = \operatorname{mat}_{\mathscr{B}_1}(g)$. Par conséquent, on obtient que $f = g$. Conclusion,

$$\boxed{\operatorname{mat}_{\mathscr{B}_1}(f) = B \qquad \text{et donc} \qquad f = g.}$$

7. On calcule directement sans les matrices,

$$g\left(X^2 - X + 1\right) = f\left(X^2 - X + 1\right) = (1 - 1 + 1)\left(1 + X + X^2\right) - \left(X^2 - X + 1\right) = 2X.$$

On retrouve bien le résultat de la question 5.

$$\boxed{g\left(X^2 - X + 1\right) = 2X.}$$

8. Quel chiffre ne faut-il jamais faire tomber de votre étagère ?

Le 8 car une fois devenu ∞ il ferait exploser votre chambre.

9. On a
$$A-2I_3=\begin{pmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{pmatrix}.$$
Donc
$$\begin{aligned}\operatorname{rg}(A-I_3)&=\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&1&-2\\1&-2&1\\-2&1&1\end{pmatrix} && L_1\leftrightarrow L_3\\&=\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&1&-2\\0&-3&3\\0&3&-3\end{pmatrix} && \begin{array}{l}L_2\leftarrow L_2-L_1\\L_3\leftarrow L_3+2L_1\end{array}\\&=\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&1&-2\\0&-1&1\\0&1&-1\end{pmatrix} && \begin{array}{l}L_2\leftarrow \frac{L_2}{3}\\L_3\leftarrow \frac{L_3}{3}\end{array}\\&=\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&1&-2\\0&-1&1\\0&0&0\end{pmatrix} && L_3\leftarrow L_3+L_2\end{aligned}$$
On obtient alors une matrice échelonnée avec deux pivots. Conclusion,
$$\boxed{\operatorname{rg}(A-2I_3)=2.}$$

10. Par la question précédente et le théorème du rang, on a
$$\dim(\operatorname{Ker}(A-2I_3))=\dim\left(\mathbb{R}^3\right)-\operatorname{rg}(A-2I_3)=3-2=1.$$
Donc $\operatorname{Ker}(A-2I_3)$ est une droite vectorielle et donc engendré par un vecteur non nul. Posons $E_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$. Alors,
$$(A-2I_3)\,E_1=\begin{pmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{pmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=0_{\mathbb{R}^3}.$$
Donc $E_1\in\operatorname{Ker}(A-2I_3)$ et $E_1\neq 0_{\mathbb{R}^3}$. Conclusion,
$$\boxed{\operatorname{Ker}(A-2I_3)=\operatorname{Vect}(E_1).}$$
Et donc puisque nous sommes dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$,
$$\boxed{\operatorname{Ker}\left(f-2\operatorname{Id}_{\mathbb{R}_2[X]}\right)=\operatorname{Vect}\left(X^2+X+1\right).}$$

11. On a
$$A+I_3=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}.$$

Soit $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$. On a

$$\begin{aligned} X \in \operatorname{Ker}(A + I_3) \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0_{\mathbb{R}^3} \\ & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \quad x = -y - z \\ & \Leftrightarrow \quad X = \begin{bmatrix} -y - z \\ y \\ z \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Donc

$$\operatorname{Ker}(A + I_3) = \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \operatorname{Vect} \underbrace{\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)}_{\mathscr{F}_1}.$$

La famille $\mathscr{F}_1$ engendre $\operatorname{Ker}(A + I_3)$. De plus ses deux vecteurs non sont pas colinéaires donc $\mathscr{F}_1$ est libre. Conclusion,

$$\boxed{\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right) \text{ est une base de } \operatorname{Ker}(A + I_3).}$$

On en déduit que

$$\boxed{\left(1 - X^2, X - X\right) \text{ est une base de } \operatorname{Ker}\left(f + \operatorname{Id}_{\mathbb{R}_2[X]}\right).}$$

12. Par lecture de la matrice D, on observe que l'on cherche e_1, e_2, e_3 tels que

$$f(e_1) = 2e_1, \qquad f(e_2) = -e_2, \qquad f(e_3) = -e_3.$$

Autrement dit,

$$\begin{gathered} f(e_1) - 2e_1 = 0 \text{ i.e. } e_1 \in \operatorname{Ker}\left(f - 2\operatorname{Id}_{\mathbb{R}_2[X]}\right) \\ f(e_2) + e_2 = 0 \text{ i.e. } e_2 \in \operatorname{Ker}\left(f + \operatorname{Id}_{\mathbb{R}_2[X]}\right) \\ f(e_3) + e_3 = 0 \text{ i.e. } e_3 \in \operatorname{Ker}\left(f + \operatorname{Id}_{\mathbb{R}_2[X]}\right). \end{gathered}$$

A l'aide des questions précédentes, posons $e_1 = 1 + X + X^2$, $e_2 = 1 - X$ et $e_3 = 1 - X^2$ et $\mathscr{B}_2 = (e_1, e_2, e_3)$. Montrons que $\mathscr{B}_2$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Posons

$$P = \operatorname{mat}_{\mathscr{C}}(\mathscr{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On a

$$\begin{aligned}
\operatorname{rg}(P) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} && \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} && L_2 \leftrightarrow L_3 \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} && \begin{array}{l} L_2 \leftarrow -L_2 \\ L_3 \leftarrow -L_3 \end{array} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} && L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2.
\end{aligned}$$

La matrice obtenue est échelonnée avec trois pivots. Donc

$$\operatorname{rg}(P) = 3 \qquad \Leftrightarrow \qquad P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R}) \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathscr{B}_2 \text{ est une base de } \mathbb{R}_2[X].$$

De plus, par les questions précédentes, on a $e_1 \in \operatorname{Ker}\left(f - 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_2[X]}\right)$ i.e. $f(e_1) = 2e_1$ et de même $(e_2, e_3) \in \operatorname{Ker}\left(f + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_2[X]}\right)$ donc $f(e_2) = -e_2$ et $f(e_3) = -e_3$. Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{B}_2 = (e_1, e_2, e_3) = \left(1 + X + X^2, 1 - X, 1 - X^2\right) \text{ est une base de } \mathbb{R}_2[X]}$$

et

$$\boxed{\operatorname{mat}_{\mathscr{B}_2}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = D.}$$

13. En posant $P = \operatorname{mat}_{\mathscr{C}}(\mathscr{B}_2)$. Par ce qui précède, on a directement

$$\boxed{A = PDP^{-1}.}$$

Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \beta \\ \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \beta & \alpha \end{pmatrix} \in G$.

14. On a directement

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \beta \\ \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \beta & \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Conclusion,

$$\boxed{M = \alpha I_3 + \beta A.}$$

15. Par la question précédente, $M = \alpha I_3 + \beta A$. Donc par la question 13.

$$M = \alpha PP^{-1} + \beta PDP^{-1} = P(\alpha I_3 + \beta D)P^{-1}.$$

Autrement dit les matrices M et $\alpha I_3 + \beta D = D_{\alpha,\beta}$ sont semblables. Dès lors,

$$\begin{aligned}
M^{2022} &= \left(PD_{\alpha,\beta}P^{-1}\right)^{2022} \\
&= PD_{\alpha,\beta}P^{-1}PD_{\alpha,\beta}P^{-1} \ldots PD_{\alpha,\beta}P^{-1} \\
&= PD_{\alpha,\beta}D_{\alpha,\beta} \ldots D_{\alpha,\beta}P^{-1} \\
&= PD_{\alpha,\beta}^{2022}P^{-1}.
\end{aligned}$$

Une petite récurrence si besoin. Ainsi,

$$\begin{aligned} M^{2022} = I_3 \quad &\Leftrightarrow \quad P\left(\alpha I_3 + \beta D\right)^{2022} P^{-1} = I_3 \\ &\Leftrightarrow \quad (\alpha I_3 + \beta D)^{2022} = P^{-1} I_3 P \qquad \text{CAR } P \text{ et } P^{-1} \text{ sont inversibles.} \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{M^{2022} = I_3 \quad \Leftrightarrow \quad (\alpha I_3 + \beta D)^{2022} = I_3.}$$

16. Par la question précédente, on a

$$\begin{aligned} & M^{2022} = I_3 \\ \Leftrightarrow \quad & (\alpha I_3 + \beta D)^{2022} = I_3 \\ \Leftrightarrow \quad & \begin{pmatrix} \alpha + 2\beta & 0 & 0 \\ 0 & \alpha - \beta & 0 \\ 0 & 0 & \alpha - \beta \end{pmatrix}^{2022} = I_3 \\ \Leftrightarrow \quad & \begin{pmatrix} (\alpha + 2\beta)^{2022} & 0 & 0 \\ 0 & (\alpha - \beta)^{2022} & 0 \\ 0 & 0 & (\alpha - \beta)^{2022} \end{pmatrix} = I_3 \qquad \text{car la matrice est diagonale} \\ \Leftrightarrow \quad & \begin{cases} (\alpha + 2\beta)^{2022} = 1 \\ (\alpha - \beta)^{2022} = 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \quad & \begin{cases} \alpha + 2\beta = 1 \text{ OU } \alpha + 2\beta = -1 \\ \alpha - \beta = 1 \text{ OU } \alpha - \beta = -1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \quad & \begin{cases} \alpha + 2\beta = 1 \\ \alpha - \beta = 1 \end{cases} \text{ OU } \begin{cases} \alpha + 2\beta = 1 \\ \alpha - \beta = -1 \end{cases} \text{ OU } \begin{cases} \alpha + 2\beta = -1 \\ \alpha - \beta = 1 \end{cases} \text{ OU } \begin{cases} \alpha + 2\beta = -1 \\ \alpha - \beta = -1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \quad & \begin{cases} \alpha + 2\beta = 1 \\ -3\beta = 0 \end{cases} \text{ OU } \begin{cases} \alpha + 2\beta = 1 \\ -3\beta = -2 \end{cases} \text{ OU } \begin{cases} \alpha + 2\beta = -1 \\ -3\beta = 2 \end{cases} \text{ OU } \begin{cases} \alpha + 2\beta = -1 \\ -3\beta = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \quad & \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 0 \end{cases} \text{ OU } \begin{cases} \alpha = 1 - 2\beta = 1 - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3} \\ \beta = \frac{2}{3} \end{cases} \\ & \text{OU } \begin{cases} \alpha = -1 - 2\beta = -1 + \frac{4}{3} = \frac{1}{3} \\ \beta = -\frac{2}{3} \end{cases} \text{ OU } \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Conclusion, les quatre solutions sont

$$\boxed{M = I_4, \qquad M = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}, \qquad M = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}, \qquad M = -I_4.}$$