



**Correction de l'interrogation 12.5**  
**d'entraînement**  
**Systemes lineaires**  
**Negligeabilite - Equivalents**

**1. Savoir appliquer l'algorithme de Gauss-Jordan sur un systeme.**

1.1 Soit  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . On a les equivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{S}) \begin{cases} 2x & -y & +3z & = & 1 \\ -4x & +2y & +z & = & 3 \\ -2x & +y & +4z & = & 4 \\ 10x & -5y & -6z & = & -10 \end{cases} & \Leftrightarrow & \begin{cases} 2x & -y & +3z & = & 1 \\ & & 7z & = & 5 \\ & & 7z & = & 5 \\ & & -21z & = & -15 \end{cases} & \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 5L_1 \end{array} \\
 & \Leftrightarrow & \begin{cases} x = \frac{1+y-3z}{2} = \frac{1-3\frac{5}{7} + y}{2} = -\frac{8}{14} + \frac{y}{2} = -\frac{4}{7} + \frac{y}{2} \\ z = \frac{5}{7}, \end{cases}
 \end{aligned}$$

Conclusion l'ensemble des solutions de  $(\mathcal{S})$  est :

$$\mathcal{S} = \left\{ \left( -\frac{4}{7} + \frac{y}{2}, y, \frac{5}{7} \right) \in \mathbb{R}^3 \mid y \in \mathbb{R} \right\} = \left( -\frac{4}{7}, 0, \frac{5}{7} \right) + \text{Vect}_{\mathbb{R}} \left( \left( \frac{1}{2}, 1, 0 \right) \right).$$

1.2 Soit  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . On a les equivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{S}) \begin{cases} 2x & +y & -4z & = & 8 \\ 3x & +3y & -5z & = & 14 \\ 4x & +5y & -2z & = & 16 \end{cases} & \Leftrightarrow & \begin{cases} 2x & +y & -4z & = & 8 \\ & 3y & +2z & = & 4 \\ & 3y & +6z & = & 0 \end{cases} & \begin{array}{l} L_2 \leftarrow 2L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array} \\
 & \Leftrightarrow & \begin{cases} 2x & +y & -4z & = & 8 \\ & 3y & +2z & = & 4 \\ & & 4z & = & -4 \end{cases} & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\
 & \Leftrightarrow & \begin{cases} x = 4 - \frac{y}{2} + 2z = 4 - 1 - 2 = 1 \\ y = \frac{4-2z}{3} = \frac{4+2}{3} = 2 \\ z = -1. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Conclusion l'ensemble des solutions de  $(\mathcal{S})$  est :

$$\mathcal{S} = \{(1, 2, -1)\}.$$

1.3 Soit  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . On a les equivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{S}) \begin{cases} x & +2y & +3z & = & 1 \\ 2x & +3y & -z & = & 0 \\ 3x & +y & +2z & = & 0 \end{cases} & \Leftrightarrow & \begin{cases} x & +2y & +3z & = & 1 \\ & -y & -7z & = & -2 \\ & -5y & -7z & = & -3 \end{cases} & \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array} \\
 & \Leftrightarrow & \begin{cases} x & +2y & +3z & = & 1 \\ & -y & -7z & = & -2 \\ & & 28z & = & 7 \end{cases} & L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1 \\
 & \Leftrightarrow & \begin{cases} x = 1 - 2y - 3z = \frac{4-2-3}{4} = -\frac{1}{4} \\ y = 2 - 7z = \frac{8-7}{4} = \frac{1}{4} \\ z = \frac{1}{4}. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Conclusion l'ensemble des solutions de  $(\mathcal{S})$  est :

$$\mathcal{S} = \left\{ \left( -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right) \right\}.$$



1.4 Soit  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{S}) \quad \begin{cases} 2x & +y & +z & = & 3 \\ 3x & -y & -2z & = & 0 \\ x & +y & -z & = & -2 \\ x & +2y & +z & = & 1 \end{cases} & \Leftrightarrow & \begin{cases} x & +y & -z & = & -2 \\ 3x & -y & -2z & = & 0 \\ 2x & +y & +z & = & 3 \\ x & +2y & +z & = & 1 \end{cases} & L_1 \leftrightarrow L_3 \\
 & \Leftrightarrow & \begin{cases} x & +y & -z & = & -2 \\ -4y & +z & = & 6 \\ -y & +3z & = & 7 \\ +y & +2z & = & 3 \end{cases} & \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array} \\
 & \Leftrightarrow & \begin{cases} x & +y & -z & = & -2 \\ y & +2z & = & 3 \\ -y & +3z & = & 7 \\ -4y & +z & = & 6 \end{cases} & L_2 \leftrightarrow L_4 \\
 & \Leftrightarrow & \begin{cases} x & +y & -z & = & -2 \\ y & +2z & = & 3 \\ & +5z & = & 10 \\ & +9z & = & 18 \end{cases} & \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 4L_2 \end{array} \\
 & \Leftrightarrow & \begin{cases} x & +y & -z & = & -2 \\ y & +2z & = & 3 \\ -y & +3z & = & 7 \\ -4y & +z & = & 6 \end{cases} & L_2 \leftrightarrow L_4 \\
 & \Leftrightarrow & \begin{cases} x & +y & -z & = & -2 \\ y & +2z & = & 3 \\ & +5z & = & 10 \\ & +9z & = & 18 \end{cases} & \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 4L_2 \end{array} \\
 & \Leftrightarrow & \begin{cases} x & +y & -z & = & -2 \\ y & +2z & = & 3 \\ & 5z & = & 10 \end{cases} & \text{car } L_3 = \frac{9}{5}L_2 \\
 & \Leftrightarrow & \begin{cases} x = -2 - y + z = -2 + 1 + 2 = 1 \\ y = 3 - 2z = 3 - 4 = -1 \\ z = 2. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Conclusion l'ensemble des solutions de  $(\mathcal{S})$  est :

$$\mathcal{S} = \{(1, -1, 2)\}.$$

1.5 Héhéhé... Gloups ! Vous voulez vraiment une solution ? Allez, c'est parti ! Soient  $(x, y, z, t, u) \in \mathbb{R}^6$ . On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{S}_{10}) \quad \begin{cases} 3x & +6y & +5z & +6t & +4u & = & 14 \\ 5x & +9y & +7z & +8t & +6u & = & 18 \\ 6x & +12y & +13z & +9t & +7u & = & 32 \\ 4x & +6y & +6z & +5t & +4u & = & 16 \\ 2x & +5y & +4z & +5t & +3u & = & 11 \end{cases} & \Leftrightarrow & \begin{cases} x & +y & +z & +t & +u & = & 3 \\ 5x & +9y & +7z & +8t & +6u & = & 18 \\ 6x & +12y & +13z & +9t & +7u & = & 32 \\ 4x & +6y & +6z & +5t & +4u & = & 16 \\ 2x & +5y & +4z & +5t & +3u & = & 11 \end{cases} & L_1 \leftarrow L_1 - L_5
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 (S_{10}) &\Leftrightarrow \begin{cases} x &+y &+z &+t &+u &= &3 \\ +4y &+2z &+3t &+u &= &3 & L_2 \leftarrow L_2 - 5L_1 \\ +6y &+7z &+3t &+u &= &14 & L_3 \leftarrow L_3 - 6L_1 \\ +2y &+2z &+t &= &4 & L_4 \leftarrow L_1 - 4L_1 \\ +3y &+2z &+3t &+u &= &5 & L_5 \leftarrow L_5 - 2L_1 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x &+y &+z &+t &+u &= &3 \\ y &= &-2 & & & & L_2 \leftarrow L_2 - L_5 \\ 6y &+7z &+3t &+u &= &14 \\ 2y &+2z &+t &= &4 \\ 3y &+2z &+3t &+u &= &5 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x &+z &+t &+u &= &3-y &= &3+2 &= &5 \\ & & & y &= &-2 \\ 7z &+3t &+u &= &14-6y &= &14+12 &= &26 \\ 2z &+t &= &4-2y &= &4+4 &= &8 \\ 2z &+3t &+u &= &5-3y &= &5+6 &= &11 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x &+z &+t &+u &= &5 \\ & & & y &= &-2 \\ z & & & +u &= &2 & L_3 \leftarrow L_3 - 3L_4 \\ 2z &+t &= &8 \\ 2z &+3t &+u &= &11 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x &+z &+t &+u &= &5 \\ & & & y &= &-2 \\ z & & & +u &= &2 \\ & & +t & -2u &= &4 & L_4 \leftarrow L_4 - 2L_3 \\ & & +3t & -u &= &7 & L_5 \leftarrow L_5 - 2L_3 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x &+z &+t &+u &= &5 \\ & & & y &= &-2 \\ z & & & +u &= &2 & L_3 \leftarrow L_3 - 3L_4 \\ 2z &+t &= &8 \\ 2z &+3t &+u &= &11 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x &+z &+t &+u &= &5 \\ & & & y &= &-2 \\ z & & & +u &= &2 \\ & & t & -2u &= &4 \\ & & & 5u &= &-5 & L_5 \leftarrow L_5 - 3L_4 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x &= &5-z-t-u &= &5-3-2+1 &= &1 \\ y &= &-2 \\ z &= &2-u &= &2+1 &= &3 \\ t &= &4+2u &= &4-2 &= &2 \\ u &= &-1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Conclusion le système  $(S_{10})$  admet une unique solution. Son ensemble solution est un singleton :

$$\mathcal{S} = \{(1, -2, 3, 2, -1)\}.$$

**2. Savoir appliquer l’algorithme de Gauss-Jordan sur une matrice.**

4.1 On a les calculs suivants :

$$\begin{aligned}
 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &\underset{\mathcal{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix} \\
 &\underset{\mathcal{L}}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} & L_2 \leftrightarrow L_3
 \end{aligned}$$



Conclusion,

$$A \underset{\mathcal{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.2 On a les calculs suivants :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\mathcal{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\underset{\mathcal{L}}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{-1} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad L_4 \leftarrow L_4 + L_3$$

Conclusion,

$$A \underset{\mathcal{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.3 On a les calculs suivants :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underset{\mathcal{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 5 \\ 0 & 15 & 5 & 15 \\ 0 & 9 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{array}$$

$$\underset{\mathcal{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow \frac{1}{5}L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{3}L_3 \\ L_4 \leftarrow -L_4 \end{array}$$

$$\underset{\mathcal{L}}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 7 & 2 & 5 \\ 0 & \boxed{3} & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \end{array}$$

Conclusion,

$$A \underset{\mathcal{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.4 On a les calculs suivants :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \underset{\mathcal{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & -8 & -1 \\ 0 & 11 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{array}$$

$$\underset{\mathcal{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 11 & 0 \\ 0 & -8 & -1 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftrightarrow L_3$$

$$\underset{\mathcal{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & -1 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow \frac{1}{11}L_2$$

$$\underset{\mathcal{L}}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 4 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + 8L_2$$



Conclusion,

$$A \underset{\mathcal{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

4.5 On a les calculs suivants :

$$\begin{aligned} A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -7 & -7 & 2 \\ 0 & 4 & -6 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} &\underset{\mathcal{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -7 & -7 & 2 \\ 0 & 4 & -6 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} & L_1 \leftrightarrow L_4 \\ &\underset{\mathcal{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -7 & -7 & 2 \\ 0 & 4 & -6 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} & L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_4 \\ &\underset{\mathcal{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -14 & 2 \\ 0 & 4 & -6 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} & L_2 \leftarrow L_2 + 7L_1 \\ &\underset{\mathcal{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -6 \\ 0 & -14 & 2 \end{pmatrix} & L_2 \leftrightarrow L_4 \\ &\underset{\mathcal{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -26 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 + 4L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 14L_2 \end{array} \\ &\underset{\mathcal{L}}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & L_4 \leftarrow L_4 + 13L_3 \end{aligned}$$

Conclusion,

$$A \underset{\mathcal{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.6 On a les calculs suivants :

$$\begin{aligned} A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} &\underset{\mathcal{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} & L_1 \leftrightarrow L_3 \\ &\underset{\mathcal{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & -8 & -4 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array} \\ &\underset{\mathcal{L}}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{4} & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{-8} \end{pmatrix} & L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \end{aligned}$$

Conclusion,

$$A \underset{\mathcal{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}.$$

3. Simplifier un petit  $o$ .

Pour aider à la compréhension du résultat, je vous ajoute des explications en rouge.

$$2.1 \underbrace{o(x^5 + x^2)}_{=o(x^5)} + \underbrace{xo(3)}_{=o(x)} + \underbrace{(o(x^2))^3}_{=o(x^2)o(x^2)o(x^2)=o(x^6)} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^6)$$

$$2.2 \underbrace{o(7\sqrt{x})}_{\sim x=o(\sqrt{x})} + \underbrace{\sin(x)}_{=o(\sqrt{x})} - \underbrace{x^2 \ln(x)}_{=o(\sqrt{x})} \underset{x \rightarrow 0}{=} o(\sqrt{x})$$

$$2.3 \underbrace{\frac{1}{x^5}}_{=o(\frac{1}{x^2})} + o(\frac{1}{x^2}) + \underbrace{\sin(x)o(\frac{1}{x^3})}_{=o(\frac{1}{x^3})=o(\frac{1}{x^2})} + o(\frac{1}{x^4 \ln(x)}) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(\frac{1}{x^2})$$

$$2.4 \underbrace{o(x^x)}_{=o(6^x)=o(x^x)} + \underbrace{2^x o(3^x)}_{=o(x^3)=o(x^x)} - 10^{10} o(\frac{x^3}{\ln(x)}) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^x)$$

$$2.5 \underbrace{9x}_{=o(x^3)} + o(x^3) + \underbrace{2019\sqrt{x}}_{=o(x^3)} + o(\ln^5(x)) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^3)$$

$$2.6 \underbrace{o(\arcsin(x^2))}_{\rightarrow \frac{\pi}{2}} + \underbrace{3 \ln(x)}_{=o(1)} + \underbrace{o(1)x}_{=o(x)=o(1)} \underset{x \rightarrow 1}{=} o(1)$$

$$2.7 \underbrace{o(\ln(1 + \underbrace{o(x)}_{=u \rightarrow 0}))}_{=u+o(u)=o(x)+o(o(x))=o(x)} + x^2 + o(\underbrace{(|\sin(x)|)^{3/2}}_{\sim |x|^{3/2}}) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x)$$

$$2.8 \underbrace{o(1)o(x^3)}_{o(x^3)} + o(x^{1/3})o(\sqrt{x}) + o(x \ln(x)) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^{5/6})$$

$$2.9 \underbrace{o(\arcsin(x - \frac{x^2}{3} + o(x^2)))}_{=u=x+o(x)} o(\underbrace{\cos(x)}_{\sim 1}) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x)$$

$$2.10 \underbrace{o(\sum_{k=1}^n x^k \ln^{n-k}(x))}_{=o(x^n)} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^n)$$

$$2.11 \underbrace{o(\exp(o(\frac{1}{x^4}) + \underbrace{(o(\frac{1}{x}))^2}_{=o(\frac{1}{x^2})} o(\ln^3(x))))}_{=o(\frac{\ln^3(x)}{x^2}) \rightarrow 0} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(1)$$

Détails : On a

$$\left(o\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2 o(\ln^3(x)) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x}\right) o\left(\frac{1}{x}\right) o(\ln^3(x)) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{\ln^3(x)}{x^2}\right).$$

Or  $\frac{1}{x^4} \ll_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} \ll_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^3(x)}{x^2}$ . Donc

$$o\left(\frac{1}{x^4}\right) + \left(o\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2 o(\ln^3(x)) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^4}\right) + o\left(\frac{\ln^3(x)}{x^2}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{\ln^3(x)}{x^2}\right).$$



Par croissance comparée, on sait que  $\frac{\ln^3(x)}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$  i.e.  $\frac{\ln^3(x)}{x^2} = o(1)$  (*attention la lecture de droite à gauche est fautive*). Donc

$$o\left(\frac{\ln^3(x)}{x^2}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(1) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

Notez qu'ici on perd de l'information, mais en prenant un terme prépondérant plus grossier ( $\frac{\ln^3(x)}{x^2}$  est une vitesse plus rapide que 1) mais il est ici inutile de garder plus d'information car en composant par l'exponentiel il est juste nécessaire de savoir que le terme tend vers 0.

Or  $e^u \underset{u \rightarrow 0}{=} 1 + o(1)$ . Donc en posant  $u = o\left(\frac{\ln^3(x)}{x^2}\right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ , on a

$$\exp\left(o\left(\frac{1}{x^4}\right) + \left(o\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2 o(\ln^3(x))\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \exp\left(o\left(\frac{\ln^3(x)}{x^2}\right)\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} e^u \underset{x \rightarrow +\infty}{=} 1 + o(1).$$

Autrement dit,

$$\exp\left(o\left(\frac{1}{x^4}\right) + \left(o\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2 o(\ln^3(x))\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 1$$

ou encore (puisque  $1 \in \mathbb{R}^*$ )

$$\exp\left(o\left(\frac{1}{x^4}\right) + \left(o\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2 o(\ln^3(x))\right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1.$$

Conclusion,

$$\boxed{o\left(\exp\left(o\left(\frac{1}{x^4}\right) + \left(o\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2 o(\ln^3(x))\right)\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(1).$$

$$2.12 \quad o\left(\underbrace{\frac{1}{x \ln^3(x)} + \frac{1}{x} o\left(\frac{1}{\ln(x^3)}\right)}_{=o\left(\frac{1}{x \ln(x)}\right)}\right) + \underbrace{\left(o\left(\frac{1}{x}\right)\right)^3 \ln(x)}_{=o\left(\frac{\ln(x)}{x^3}\right)} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x \ln(x)}\right)$$

$$2.13 \quad o\left[\underbrace{\ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)}_{\sim \frac{1}{n^2} n = \frac{1}{n}} n + o\left(\underbrace{\tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}_{\sim \frac{1}{\sqrt{n}}}\right) o\left(\underbrace{\sqrt[3]{\frac{1}{n^6 + 2}}}_{\sim \left(\frac{1}{n^6}\right)^{1/3} = \frac{1}{n^2}}\right)\right] \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

$$2.14 \quad o\left(\underbrace{3 \sin^2(x)}_{\sim 3x^2}\right) + \underbrace{\cos(x)}_{\sim 1} o(x^3) + o\left(\underbrace{\ln(x+1)}_{\sim x}\right) + o\left(\underbrace{\ln(1-x)}_{\sim -x}\right) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x)$$

$$2.15 \quad o\left(\underbrace{(e^{5n})^2}_{=e^{10n} = o\left(\frac{n!}{n^3}\right)} + \underbrace{\frac{n!}{n^3} + n^2 \ln^5(n)}_{=o\left(\frac{n!}{n^3}\right)}\right) + o(\operatorname{sh}(n)) o(\operatorname{ch}(n)) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{n!}{n^3}\right)$$

$$2.16 \quad o\left(\underbrace{\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)}_{\sim \frac{1}{n^2}}\right) - \underbrace{\sin^2\left(o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}_{\sim \left(o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2 = o\left(\frac{1}{n^2}\right)} + \underbrace{\sin\left(\left(o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2\right)}_{=\sin\left(o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \sim o\left(\frac{1}{n^2}\right)} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$2.17 \quad o(\ln(x)) o\left(\underbrace{\frac{1}{\arcsin\left(\frac{1}{x}\right)}}_{\sim \frac{1}{x} = x}\right) - 5 o(x^2) o\left(\underbrace{\frac{1}{\ln^3(x)}}_{=o\left(\frac{x^2}{\ln^3(x)}\right)}\right) + o\left(\underbrace{\arctan(\sqrt{x})}_{\rightarrow \frac{\pi}{2}}\right)^4 \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{x^2}{\ln^3(x)}\right)$$

$$2.18 \quad o\left(\underbrace{\sqrt{n! + 3^n + n^n}}_{\sim n^{n/2}}\right) o\left(\underbrace{\arcsin\left(\frac{1}{n^2}\right) + \ln\left(\frac{1}{n}\right)}_{\sim \frac{1}{n^2} = o(-\ln(n))}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(n^{n/2})$$

$$2.19 \quad o\left(o\left[\underbrace{o(\ln^3(x)) x^2}_{=o(x^2 \ln^3(x))} + \underbrace{\tan(3x^2)}_{\sim 3x^2} + \underbrace{o(x) o(\sqrt{x})}_{=o(x^{3/2})}\right]\right) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^{3/2})$$



$$2.20 \quad o((x-2)^2) \underbrace{\sqrt{o(\operatorname{sh}(x-2))}}_{= \sqrt{o(x-2)} = o(\sqrt{x-2})} + \underbrace{\sqrt{x-2} e^{x-2} o(4)}_{\sim 1} \underset{= o(\sqrt{x-2})}{=} o(\sqrt{x-2})$$





4. **Déterminer un équivalent.** Attention à ne pas faire, des compositions d'équivalents ni des sommes d'équivalents ! Même si les calculs parfois y ressemblent ce n'est jamais le cas.

2.1  $\frac{\cos(x) - \sqrt{1+x^2}}{x^2} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -1.$

*Explication :* On a

$$\frac{\cos(x) - \sqrt{1+x^2}}{x^2} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - \left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)}{x^2} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{-x^2 + o(x^2)}{x^2} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{-x^2}{x^2} = -1.$$

2.2  $\frac{x^3 \arctan(x) - x^4}{\cos(x^2) - 1} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{2x^2}{3}$

*Explication :* On a

$$\frac{x^3 \arctan(x) - x^4}{\cos(x^2) - 1} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x^3 \left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) - x^4}{1 - \frac{x^4}{2} + o(x^4) - 1} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{-\frac{x^6}{3} + o(x^6)}{-\frac{x^4}{2} + o(x^4)} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{-\frac{x^6}{3}}{-\frac{x^4}{2}} = \frac{2x^2}{3}.$$

2.3  $\frac{\sin(x) - \ln(1+x)}{x \tan(x)} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2}$

*Explication :* On a

$$\frac{\sin(x) - \ln(1+x)}{x \tan(x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x + o(x^2) - \left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)}{x \tan(x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x \tan(x)} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\frac{x^2}{2}}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

2.4  $5^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \ln(5)$

*Explication :* En posant  $u(x) = x \ln(5) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ , on a

$$5^x - 1 = e^{x \ln(5)} - 1 \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + u(x) + o(u(x)) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{=} x \ln(5) + o(x \ln(5)) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \ln(5).$$

2.5  $\frac{\arctan(x) - \sin(x)}{\text{sh}(x)} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^2}{6}$

*Explication :* On a

$$\frac{\arctan(x) - \sin(x)}{\text{sh}(x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x - \frac{x^3}{3} + o(x^3) - \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)}{\text{sh}(x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{-\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{\text{sh}(x)} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{-\frac{x^3}{6}}{x} = -\frac{x^2}{6}.$$

2.6  $e^{\cos(x)} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} e$

*Explication :* On sait que  $\cos(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$ . Donc  $e^{\cos(x)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} e^1 \neq 0$  i.e.  $e^{\cos(x)} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} e$ .

*Attention à ne pas dire*  $\cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1 \Rightarrow e^{\cos(x)} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} e$ . *On peut composer les limites mais pas les équivalents.*

2.7  $(\sin(x) + x)^3 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 8x^3$

*Explication :* On a  $\sin(x) + x \underset{x \rightarrow 0}{=} x + o(x) + x \underset{x \rightarrow 0}{=} 2x + o(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 2x$ . Donc par élévation à la puissance,

$$(\sin(x) + x)^3 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 8x^3.$$

2.8  $\arcsin(x)\sqrt{1+x} - e^x \ln(1+x^2) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$

*Explication :* On a  $\arcsin(x)\sqrt{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \times 1 = x$  et  $-e^x \ln(1+x^2) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -1 \times x^2 = -x^2$ . On constate donc que  $-e^x \ln(1+x^2) \ll \arcsin(x)\sqrt{1+x}$ . Ainsi,  $\arcsin(x)\sqrt{1+x} - e^x \ln(1+x^2) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \arcsin(x)\sqrt{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ .

*Attention à ne pas dire* «  $\arcsin(x)\sqrt{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$  et  $-e^x \ln(1+x^2) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -x^2$  implique  $\arcsin(x)\sqrt{1+x} - e^x \ln(1+x^2) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x - x^2$  », ce qui serait faire une somme d'équivalents !



$$2.9 \frac{\sqrt{1+2x}-\cos(x)}{x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1$$

*Explication* : On a

$$\frac{\sqrt{1+2x}-\cos(x)}{x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1 + \frac{2x}{2} + o(x) - (1 + o(x))}{x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x + o(x)}{x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{x} = 1.$$

$$2.10 \operatorname{ch}(x) - (1 + 3x)^5 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -15x$$

*Explication* : On a

$$\operatorname{ch}(x) - (1 + 3x)^5 \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + o(x) - (1 + 5 \times 3x + o(x)) \underset{x \rightarrow 0}{=} -15x + o(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -15x.$$

$$2.11 \operatorname{sh}(e^{3x}) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \operatorname{sh}(1)$$

*Explication* : Puisque  $e^{3x} \underset{x \rightarrow 0}{\rightarrow} 1$ , on en déduit que  $\operatorname{sh}(e^{3x}) \underset{x \rightarrow 0}{\rightarrow} \operatorname{sh}(1)$  car  $\operatorname{sh}$  est continue en 1. Or  $\operatorname{sh}(1) \neq 0$ .

Donc  $\operatorname{sh}(e^{3x}) \underset{x \rightarrow 0}{\rightarrow} \operatorname{sh}(1) \Leftrightarrow \operatorname{sh}(e^{3x}) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \operatorname{sh}(1)$ .

*Encore une fois, on fait une composition de limites et non d'équivalents.*

$$2.12 \arctan(\operatorname{sh}(x)) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$$

*Explication* : Posons  $u(x) = \operatorname{sh}(x)$ . On a  $u(x) \underset{x \rightarrow 0}{\rightarrow} 0$  et  $\arctan(u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$ . Donc on a

$$\arctan(\operatorname{sh}(x)) \underset{x \rightarrow 0}{=} \arctan(u(x)) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} u(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \operatorname{sh}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x.$$

*Attention ! Notez bien le sens du raisonnement. Nous avons fait un changement de variable et non une composition. Il serait absolument FAUX d'affirmer  $\operatorname{sh}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \Rightarrow \arctan(\operatorname{sh}(x)) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \arctan(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ , même si la conclusion est la même !*

$$2.13 \arctan(\operatorname{ch}(x)) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\pi}{4}$$

*Explication* : On a  $\operatorname{ch}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\rightarrow} 1$ . Donc  $\arctan(\operatorname{ch}(x)) \underset{x \rightarrow 0}{\rightarrow} \arctan(1) = \frac{\pi}{4} \neq 0$  i.e.  $\arctan(\operatorname{ch}(x)) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\pi}{4}$ .

*Attention c'est une composition de limites et non d'équivalents.*

$$2.14 \frac{\ln(\cos(2x))}{\ln(\cos(3x))} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{4}{9}.$$

*Explication* : En posant  $u(x) = -2x^2 + o(x^2) \underset{x \rightarrow 0}{\rightarrow} 0$  et  $v(x) = -\frac{9x^2}{2} + o(x^2) \underset{x \rightarrow 0}{\rightarrow} 0$ , on a

$$\begin{aligned} \frac{\ln(\cos(2x))}{\ln(\cos(3x))} &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{\ln\left(1 - \frac{4x^2}{2} + o(x^2)\right)}{\ln\left(1 - \frac{9x^2}{2} + o(x^2)\right)} \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{\ln(1 + u(x))}{\ln(1 + v(x))} \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{u(x) + o(u(x))}{v(x) + o(v(x))} \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{-2x^2 + o(x^2) + o(x^2)}{-\frac{9x^2}{2} + o(x^2) + o(x^2)} \\ &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{-2x^2}{-\frac{9x^2}{2}} \\ &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{4}{9}. \end{aligned}$$

$$2.15 (\ln(1+x) - x)^2 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^4}{4}.$$

*Explication* : On a

$$\ln(1+x) - x \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - x \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{x^2}{2} + o(x^2) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}.$$



Donc par élévation au carré :  $(\ln(1+x) - x)^2 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^4}{4}$ .

$$2.16 \quad \frac{\operatorname{ch}(x) - \cos(x)}{1 + x \arctan(x^2) - \sqrt{1+x^3}} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{2}{x}.$$

*Explication* : On a

$$\frac{\operatorname{ch}(x) - \cos(x)}{1 + x \arctan(x^2) - \sqrt{1+x^3}} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)}{1 + x(x^2 + o(x^2)) - \left(1 + \frac{x^3}{2} + o(x^3)\right)} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x^2 + o(x^2)}{\frac{x^3}{2} + o(x^3)} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{\frac{x^3}{2}} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{2}{x}.$$

$$2.17 \quad \sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{\sqrt{2}}$$

*Explication* : On a

$$1 - \sqrt{1 - x^2} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x^2}{2} + o(x^2) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2}.$$

Donc par passage à la puissance 1/2,  $\sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{\sqrt{2}}$ .

$$2.18 \quad \frac{e^x - 1 - x}{\ln(1+x)} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{2}$$

*Explication* : On a

$$\frac{e^x - 1 - x}{\ln(1+x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - 1 - x}{\ln(1+x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{\ln(1+x)} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\frac{x^2}{2}}{x} = \frac{x}{2}.$$

$$2.19 \quad \ln(1+x^2) - \arctan(x^2) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^4}{2}$$

*Explication* : On a

$$\ln(1+x^2) - \arctan(x^2) \underset{x \rightarrow 0}{=} x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4) - \left(x^2 - \frac{x^6}{3} + o(x^6)\right) \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{x^4}{2} + o(x^4) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^4}{2}.$$

$$2.20 \quad \ln(1 + \sin(x)) \underset{x \rightarrow 0}{\sim}$$

*Explication* : On pose  $u(x) = x + o(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ . Alors

$$\ln(1 + \sin(x)) \underset{x \rightarrow 0}{=} \ln(1 + x + o(x)) \underset{x \rightarrow 0}{=} \ln(1 + u(x)) \underset{x \rightarrow 0}{=} u(x) + o(u(x)) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + o(x) + o(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x.$$

*Attention à nouveau à ne pas faire de composition c'est-à-dire à écrire ici que*

$$\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \text{ implique } \ln(1 + \sin(x)) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x,$$

*ce qui est un raisonnement faux.*