

Calcul algébrique

On reconnaît une somme triangulaire ✓

$$(1) S_n = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^j 2^i \quad \checkmark \quad \text{A faire dans l'autre sens}$$

On reconnaît une somme géométrique

$$S_n = \sum_{j=0}^n (j+1) 2^j \quad \checkmark = \sum_{j=0}^n j 2^j + \sum_{j=0}^n 2^j \quad \text{oui}$$

$\downarrow$??? $\downarrow$ OK

$$= (n 2^{n+1} - 2^{n+1} + 2) + \left(\frac{1-2^{n+1}}{1-2} \right)$$

$S_n = n 2^{n+1} + 1$

$\hookrightarrow 2^{n+1} - 1$

(2) On a $S_n = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^j 2^i$ me dépend pas de i ✓

$(=) S_n = \sum_{j=0}^n (j+1) 2^j$

car $\sum_{i=0}^j 2^i$ est de longueur $(j+1)$ oui

(3) On effectue une glissement d'indice
Soit $j = j+1 \Leftrightarrow j = \tilde{j} - 1$

On a alors

$$S = \sum_{j=1}^{n+1} (j-1+1) 2^{j-1} = \sum_{j=1}^{n+1} j 2^{j-1} \quad \checkmark \quad \text{car l'indice est muet} \quad \checkmark$$

On a $S = n 2^{n+1} + 1 \quad \checkmark$

Ainsi $\sum_{j=1}^{n+1} j 2^{j-1} = n 2^{n+1} + 1 \quad \checkmark$

$\Rightarrow \sum_{j=1}^n j 2^{j-1} = (n-1) 2^n + 1 \quad \text{OK}$

$$④ T_n = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i+1} j 2^{j-1}$$

D'après la question ③ on remplace n par i on a alors: oui

$$T_n = \sum_{i=1}^n (i-1) 2^i + 1 \quad \checkmark$$

$$T_n = \sum_{i=1}^n i 2^i - \sum_{i=1}^n 2^i + \sum_{i=1}^n 1 \quad \text{oui}$$

on reconnaît une suite géométrique. ✓

$$T_n = \sum_{i=1}^n i 2^i - 2 \times \frac{1-2^{n+1}}{1-2} + n$$

⚠

) Ranguei ??

$$T_n = ((n-1) 2^n - 2^{n+1} + 2) - 2^{n+1} + 1 + n$$

$$T_n = n 2^n - 3 \times 2^n + 3 + n$$

$$\boxed{T_n = (n-3) 2^n + n + 3}$$