Solution de l'exercice de Révision Automne 01 - Calcul Algébrique

Solution de l'exercice 1

1. Commençons par sommer en interne sur j et donc en externe sur i. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=i}^{n} 2^j.$$

On reconnaît dans la somme interne une somme géométrique de raison $2 \neq 1$ donc

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} 2^i \frac{2^{n-i+1} - 1}{2 - 1} = \sum_{i=0}^{n} \left(2^{n+1} - 2^i\right) = (n+1)\, 2^{n+1} - \sum_{i=0}^{n} 2^i.$$

On reconnaît à nouveau une somme géométrique :

$$S_n = (n+1)\, 2^{n+1} - \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = (n+1)\, 2^{n+1} - 2^{n+1} + 1 = n2^{n+1} + 1.$$

Conclusion, on a bien

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad S_n = n2^{n+1} + 1.}$$

2. Inversons l'ordre de sommation en sommant en interne sur i et en externe sur j :

$$S_n = \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{j} \underbrace{2^j}_{\text{indépendant de } i} = \sum_{j=0}^{n} 2^j\,(j+1)\,.$$

On obtient bien que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad S_n = \sum_{j=0}^{n} (j+1)\, 2^j.}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Effectuons le changement d'indice $\tilde{j} = j - 1$. Dès lors

$$\sum_{j=1}^{n} j2^{j-1} = \sum_{j=0}^{n-1} (j+1)2^j.$$

Donc par la question précédente,

$$\sum_{j=1}^{n} j2^{j-1} = S_{n-1}.$$

D'où par la question 1

$$\sum_{j=1}^{n} j2^{j-1} = S_{n-1} = (n-1)2^n + 1.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{j=1}^{n} j2^{j-1} = (n-1)\, 2^n + 1.}$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par la question précédente appliquée à $n = i + 1$, on a les égalités entre réels suivantes :

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i+1} j2^{j-1} = \sum_{i=1}^{n} \left[(i+1-1)\, 2^{i+1} + 1 \right] = \sum_{i=1}^{n} i2^{i+1} + \sum_{i=1}^{n} 1 = 4 \sum_{i=1}^{n} i2^{i-1} + n.$$

A nouveau par la question précédente,

$$T_n = 4 \left[(n-1)\, 2^n + 1 \right] + n.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad T_n = (n-1)\, 2^{n+2} + n + 4.}$$