

Exercice de Révision Automne 2 - Equations complexes

Soit $z \in \mathbb{C}$

$$(E): z^3 - (3+2i)z^2 + (3+11i)z - 2(1+2i) = 0$$

Posons $\mathcal{I}_E$ l'ensemble de solutions de (E)

1) Soit $x \in \mathbb{R}$
 $x \in \mathcal{I}_E \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 2 + i(-2x^2 + 11x - 14) = 0$ oui

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x^2 + 3x - 2 = 0 & (1) \\ -2x^2 + 11x - 14 = 0 & (2) \end{cases} \quad \checkmark$$

On calcule le discriminant de (2)

$$\Delta_1 = 11^2 - 4 \times (-2) \times (-14) \quad \checkmark$$

$$\Delta_1 = 121 - 112 \quad \checkmark$$

$$\Delta_1 = 9 \quad \checkmark$$

$$x_1 = \frac{-11-3}{-2 \times 2} = \frac{1}{2} \quad x_2 = \frac{-11+3}{-2 \times (-2)} = 2$$

(2) $\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ ou $x = 2$ Bien

On regarde si ces racines fonctionnent pour la (1) oui

Si $x = \frac{1}{2}$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \times \left(\frac{1}{2}\right) - 2 \neq 0 \quad \text{Parcequ'il ?}$$

Donc $\frac{1}{2}$ n'est pas solution de (1)

Si $x = 2$

$$8 - 12 + 6 - 2 = 0 \quad \checkmark$$

Donc 2 est solution de (1) \checkmark

$$\text{Ainsi } x \in \mathbb{Z}^- \Rightarrow x = 2 \quad \text{oui}$$

2) Par la question précédente on peut factoriser le polynôme. exact

$$(C) \Leftrightarrow (z-2)(z^2 - (1+2i)z + (1+7i)) = 0 \quad \text{oui}$$

Posons

$$(P) \Leftrightarrow z^2 - (1+2i)z + (1+7i) = 0 \quad \checkmark$$

Soit $z \in i/\mathbb{R}$ Non prendre $z \in \mathbb{C}$ quelconque ici
 $z \in \mathbb{R}$

Soit Δ_2 le discriminant de (P) ✓

$$\Delta_2 = (1+2i)^2 - 4 \times (1+7i) \quad \checkmark$$

$$\Delta_2 = 1 + 4i - 4 - 4 - 28i \quad \checkmark$$

$$\Delta_2 = -7 - 24i \quad \checkmark$$

Soit $\delta = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}$ et $\delta \in \mathbb{C}$

$$\delta^2 = \Delta_2$$

$$|\Delta_2| = \sqrt{49 + 576} = \sqrt{625} = \sqrt{25 \times 25} = 25 \quad \text{oui}$$

$$\delta^2 = \Delta_2 \Leftrightarrow \begin{cases} (x+iy)^2 = -7 - 24i \\ |\delta|^2 = |\Delta_2| = 25 \end{cases} \quad \checkmark$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -7 \\ 2xy = -24 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \quad \text{oui}$$

$$\delta^2 = \Delta_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 7 \\ 2y^2 = 32 \\ 2xy = -24 \end{cases} \quad \checkmark$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 9 \\ y^2 = 16 \\ 2xy = -24 \end{cases} \quad \checkmark$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -4 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = -3 \\ y = +4 \end{cases} \quad \text{car } xy < 0 \quad \text{Bien}$$

Enfin, d'ailleurs, $\delta = 3 - 4i$ $\checkmark$ les deux solutions de (F)
 ne sont alors données par

$$z_1 = \frac{1+2i - 3+4i}{2} = -1+3i \quad 3!$$

$$z_2 = \frac{1+2i + 3+4i}{2} = 2+i \quad \text{ou}$$

Conclusion pour tout $z \in \mathbb{C}$ Très bien!!

$$z^3 - (3+2i)z^2 + (3+11i)z - 2(1+7i) = 0 \Leftrightarrow z \in \{2, -1+3i, 2-i\}$$

Vérification bien. cf corrigé pour une vérification plus facile.

Pour $z = 2$

$$2^3 - (3+2i)2^2 + (3+11i)2 - 2(1+7i) = 8+12-8i+6+22i-2-14i = \underline{\underline{0}}$$

Pour $z = (-1+3i)$

$$A = (-1+3i)^2 - (1+2i)(-1+3i) + (1+7i)$$

$$A = 1 - 6i - 9 + 1 - 3i + 2i + 6 + 1 + 7i$$

$$\underline{A = 0}$$

$$\text{Then } g = (2 - i)$$

$$B = (2 - i)^2 - (1 + 2i)(2 - i) + (1 + 7i)$$

$$B = 4 - 4i - 1 - 2 + i - 4i - 2 + 1 + 7i$$

$$\underline{B = 0}$$