Solution de l'exercice de Révision Automne 02 - Equations complexes

Solution de l'exercice 1

1. Notons $\mathscr{S}_\mathbb{R}$ les solutions réelles de (E). Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} x \in \mathscr{S}_\mathbb{R} \quad &\Leftrightarrow \quad x^3 - (3+2i)\,x^2 + (3+11i)\,x - 2\,(1+7i) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x^3 - 3x^2 + 3x - 2 + i\left(-2x^2 + 11x - 14\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^3 - 3x^2 + 3x - 2 = 0 & (1) \\ -2x^2 + 11x - 14 = 0 & (2) \end{cases} \quad \text{par unicité de la forme algébrique.} \end{aligned}$$

Soit Δ le discriminant de (2). On a $\Delta = 121 - 8 \times 14 = 121 - 112 = 9$. Ainsi,

$$(2) \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{-11-3}{-4} = \frac{7}{2} \quad \text{OU} \quad x = \frac{-11+3}{-4} = 2.$$

On vérifie que $\frac{7}{2} \times 2 = 7 = \frac{-14}{-2}$ *et* $\frac{7}{2} + 2 = \frac{11}{2} = -\frac{11}{-2}$.

Si $x = \frac{7}{2}$, alors

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 2 = \frac{7 \times 49}{8} - 3\frac{49}{4} + 3\frac{7}{2} - 2 = \frac{49\,(7-6) + 12 \times 7 - 16}{8} = \frac{49 - 16 + 54}{8} = \frac{87}{8} \neq 8.$$

Donc $\frac{7}{2}$ n'est pas solution de (1).

Si $x = 2$, on a

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 2 = 8 - 12 + 6 - 2 = 0.$$

Donc $x = 2$ est une solution de (1). Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{S}_\mathbb{R} = \{2\}\,.}$$

2. Soit $z \in \mathbb{C}$. Puisque 2 est une solution de (E), en factorisant, on a

$$\begin{aligned} (E) \quad &\Leftrightarrow \quad (z-2)\left(z^2 - (1+2i)\,z + 1 + 7i\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad z = 2 \quad \text{OU} \quad z^2 - (1+2i)\,z + 1 + 7i = 0. \end{aligned}$$

Posons

$$z^2 - (1+2i)\,z + 1 + 7i = 0. \tag{F}$$

Soit Δ son discriminant. On a

$$\Delta = (1+2i)^2 - 4 - 28i = 1 + 4i - 4 - 4 - 28i = -7 - 24i.$$

Soient $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $\delta = x+iy$. On a les équivalences suivantes :

$$\delta^2 = \Delta \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - y^2 + 2ixy = -7 - 24i \\ x^2 + y^2 = |\delta|^2 = |\Delta| = \sqrt{49+576} = \sqrt{625} \quad \begin{aligned} &= \sqrt{5 \times 125} \\ &= \sqrt{25 \times 25} \\ &= 25 \end{aligned} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = -7 \\ x^2 + y^2 = 25 \\ 2xy = -24 \end{cases} \qquad \text{par unicité de la forme algébrique}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 = 9 \\ y^2 = 16 \\ 2xy = -24 \end{cases} \qquad \text{en faisant } \frac{(1)+(2)}{2} \text{ et } \frac{(2)-(1)}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = -4 \end{cases} \quad \text{OU} \quad \begin{cases} x = -3 \\ y = 4 \end{cases} \qquad \text{car } xy \leqslant 0$$

Posons $\delta = 3 - 4i$. On obtient alors,

$$(F) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} & z = \frac{-b+\delta}{2a} = \frac{1+2i+3-4i}{2} = 2-i \\ \text{OU} & \\ & z = \frac{-b-\delta}{2a} = \frac{1+2i-3+4i}{2} = -1+3i. \end{aligned}$$

Donc les solutions de (F) sont $2-i$ et $-1+3i$.
On a bien $(2-i)(-1+3i) = -2+6i+i+3 = 1+7i$ *et* $2-i-1+3i = 1+2i$.
Conclusion, l'ensemble des solutions de (E) est donné par

$$\boxed{\mathscr{S} = \{2; 2-i; -1+3i\}.}$$