Revision Automne 03

Fonctions réelles - Reda

Soit $f(x) = \sqrt{(x+1)(x-3)} + 4\ln\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-3}\right)$

Soit $x \in \mathbb{R}$

et $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-3} > 0$ ⚠

1. $f(x)$ existe $\Leftrightarrow (x+1)(x-3) \geqslant 0$ ✓ et $x+1 \geqslant 0$ ✓ et $x-3 \geqslant 0$. ✓

racines évidentes

$$\begin{cases} x \geqslant -1 \text{ et } x \geqslant 3 \\ \text{ou} \\ x \leqslant -1 \text{ et } x \leqslant 3 \end{cases} \quad \Big| \quad \Leftrightarrow x \geqslant -1 \checkmark \quad \Big| \quad x \geqslant 3 \checkmark$$

Or, pour $x \in]-\infty ; -1]$, $x+1 \leqslant 0$ et $x-3 < 0$
$\Rightarrow \sqrt{x+1} + \sqrt{x-3}$ IMPOSSIBLE

De plus l'addition de deux nombres positifs donne un nombre positif.

à en parler avant

D'où : $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-3} > 0$, $\forall x \geqslant 3$ car $3 > -1$.

Donc $f(x)$ existe $\Leftrightarrow x \in [3 ; +\infty[$. oui

Conclusion : $\mathcal{D} = [3 ; +\infty[$

✓

2. • f est dérivable en tant que somme de composées de fonctions dérivables, sur son ensemble de définition $\mathcal{D}$.

Faux à cause des racines carrées.

$f(x) = u + v$ avec $u = \sqrt{(x+1)(x-3)}$

$v = 4\ln\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-3}\right)$

<u>On calcule :</u>

$$u' = \left(\sqrt{(x+1)(x-3)}\right)'$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{(x+1)(x-3)}} \times \left[(x+1)(x-3)\right]'$$

oui

$(= w'n + wn'$ avec $w = x+1$, $n = x-3)$

$$= \frac{1 \times (x-3) + (x+1) \times 1}{2\sqrt{(x+1)(x-3)}}$$

✓

$$\boxed{u' = \frac{x-3+x+1}{2\sqrt{(x+1)(x-3)}} = \frac{2(x-1)}{2\sqrt{(x+1)(x-3)}}}$$

oui

$$v' = \left(4\ln\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-3}\right)\right)'$$

$$= 4 \times \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-3}} \times \left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}} + \frac{1}{2\sqrt{x-3}}\right)$$

oui

$$= \frac{4}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-3}} \times \frac{\sqrt{x-3} + \sqrt{x+1}}{2\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x-3}}$$

✓

$$= \frac{4}{2\sqrt{(x+1)(x-3)}}$$

$$\boxed{v' = \frac{2}{\sqrt{(x+1)(x-3)}}}$$

bien

Ainsi, $f'(x) = u' + v'$

$$f'(x) = \frac{2(x-1)}{2\sqrt{(x+1)(x-3)}} + \frac{2}{\sqrt{(x+1)(x-3)}}.$$

$$= \frac{x+1}{\sqrt{(x+1)(x-3)}} = \sqrt{\frac{x+1}{x-3}}$$ mon erreur.

3 On admet la dérivée : $f'(x) = \dfrac{2(x-1) + \sqrt{x+1} - \sqrt{x-3}}{2\sqrt{(x+1)(x-3)}}$

On calcule : $2(x-1) + \sqrt{x+1} - \sqrt{x-3} \geqslant 0$

On a : $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-3} > 0$ ✓, car $x \in [3;+\infty[$,

et $(x+1) > (x-3)$ oui sur $[3;+\infty[$.

- $2(x-1) \geqslant 0$ ✓

$\iff 2x - 2 \geqslant 0$

$\iff x \geqslant 1.$ ~~et $1 \leqslant x \leqslant 3$.~~ or $x \geqslant 3 \geqslant 1$

Donc, sur $D/\{3\}$, $f'(x) > 0$. oui

On trace le tableau suivant :

x	3	$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$ $+$	
f	$4\ln(2)$ ↗	$+\infty$

$f(3) = 4\ln(2)$ non justifié

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ✓ non justifié

$\boxed{4}$ $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{(x+1)(x-3)} + 4\ln\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-3}\right)}{x}$

On a le droit de séparer une limite en deux qu'en ayant démontrer l'existence des limites.

Contre exemple : $\lim_{x \to +\infty} 0 \neq \lim_{x \to +\infty} x - \lim_{x \to +\infty} x$.

$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{(x+1)(x-3)}}{x} + 4 \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln\left(\sqrt{x-3} + \sqrt{x+1}\right)}{x}$

??? ???

$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(x+1)(x-3)}{x^2} + 4 \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x-3} + \sqrt{x+1}}{e^x}$

ok cf corrigé!