Solution de l'exercice de Révision Automne 03 - Fonctions réelles

Solution de l'exercice 1

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes : *pensez bien au démarrage à préciser tous les problèmes éventuels même si certains sont redondants.*

$$f(x) \text{ existe} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (x+1)(x-3) \geqslant 0 \\ \sqrt{x+1}+\sqrt{x-3} > 0 \\ x+1 \geqslant 0 \\ x-3 \geqslant 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \sqrt{x+1}+\sqrt{x-3} > 0 \\ x+1 \geqslant 0 \\ x-3 \geqslant 0. \end{cases}$$

En effet, si $x+1 \geqslant 0$ et $x-3 \geqslant 0$ alors $(x+1)(x-3) \geqslant 0$. Puis,

$$f(x) \text{ existe} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \sqrt{x+1}+\sqrt{x-3} > 0 \\ x \geqslant -1 \\ x \geqslant 3 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x \geqslant 3.$$

En effet, si $x \geqslant 3$, alors $x \geqslant -1$ et même $x+1>0$ donc $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-3} > 0$. Conclusion, l'ensemble de définition de f est

$$\boxed{\mathcal{D} = [3;+\infty[\,.}$$

2. *La racine carrée n'est pas dérivable en* 0*, nous faisons donc attention à exclure ces valeurs pour calculeer la dérivée.* La fonction racine carrée et la fonction logarithme sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$. Soit $x \in [3;+\infty[$. De même que dans la question précédente, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{cases} (x+1)(x-3) > 0 \\ \sqrt{x+1}+\sqrt{x-3} > 0 \\ x+1 > 0 \\ x-3 > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x+1 > 0 \\ x-3 > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x > -1 \\ x > 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad x > 3.$$

Ainsi, la fonction f est dérivable sur $]3;+\infty[$. De plus, pour tout $]3;+\infty[$,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{((x+1)(x-3))'}{2\sqrt{(x+1)(x-3)}} + 4\frac{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-3}\right)'}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-3}} \\
&= \frac{x-3+x+1}{2\sqrt{(x+1)(x-3)}} + 4\frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}+\frac{1}{2\sqrt{x-3}}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-3}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{(x+1)(x-3)}}\left(2x-2+\frac{4\left(\sqrt{x-3}+\sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-3}}\right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{(x+1)(x-3)}}(2x-2+4) \\
&= \frac{x+1}{\sqrt{(x+1)(x-3)}} \\
&= \sqrt{\frac{x+1}{x-3}}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in]3;+\infty[, \qquad f'(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-3}}.}$$

3. Soit $x > 3$, alors $x+1 > 0$ et $x-3 > 0$ donc $\sqrt{\frac{x+1}{x-3}} > 0$ Ainsi,

$$\forall x \in]3;+\infty[, \qquad f'(x) > 0.$$

Donc la fonction f est strictement croissante sur $]3;+\infty[$ et par continuité de f en 3, f est strictement croissante sur $[3;+\infty[$. Or

$$f(3) = \sqrt{4\times 0} + 4\ln\left(\sqrt{4}+\sqrt{0}\right) = 4\ln(2).$$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{(x+1)(x-3)} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 4\ln\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-3}\right) = +\infty$. D'où,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Conclusion, on obtient le tableau de variation suivant :

x	3	$+\infty$
f	$4\ln(2)$ $\nearrow$	$+\infty$

4. Pour tout $x > 3$, on a

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{x^2}\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{3}{x}\right)}}{x} + 4\frac{\ln\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-3}\right)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-3}}\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-3}}{x}.$$

Or $x > 0$, donc

$$\frac{\sqrt{x^2}\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{3}{x}\right)}}{x} = \sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{3}{x}\right)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

De plus, en posant $u = \sqrt{x+1} + \sqrt{x-3}$, on a $u \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et par croissance comparée, $\lim\limits_{u\to+\infty} \dfrac{\ln(u)}{u} = 0$. Donc par composition,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-3}\right)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-3}} = 0.$$

Enfin, puisque $x > 3$,

$$\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-3}}{x} = \sqrt{1+\frac{1}{x}} + \sqrt{1-\frac{3}{x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 2.$$

Par somme et produit, on en déduit que

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1.}$$

Avec de l'analyse asymptotique, on peut montrer que $f(x) - x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ *et que donc* f *admet une branche asymptotique de direction* $y = x$ *mais pas d'asymptote.*