Solution de l'exercice de Révision Automne 04 - Calcul dans $\mathbb{R}$

Solution de l'exercice 1 Soit $x \in \mathbb{R}$. On commence par observer que

$$(I) \text{ est bien définie} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 4 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \neq 4 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq -2 \text{ ET } x \neq 2.$$

Fixons désormais $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$.
Afin de multiplier l'inégalité par $x^2 - 4$, il nous faut connaître son signe. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$. On a

$$x^2 - 4 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < -2 \text{ OU } x > 2.$$

Premier cas. Soit $x \in \left]-\infty; -2\right[\cup \left]2; +\infty\right[$. Alors, $x^2 - 4 > 0$. Donc

$$(I) \quad \Leftrightarrow \quad x^3 - x^2 - 2x \leqslant -x^2 + 4 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 - 2x - 4 \leqslant 0.$$

On observe que 2 est une racine « évidente » de x^3-2x-4. En effet, si $x = 2$, $x^3-2x-4 = 8-4-4 = 0$. Donc il est possible de factoriser $x^3 - 2x - 4$ par $(x - 2)$ comme suit :

$$x^3 - 2x - 4 = (x - 2)\left(x^2 + 2x + 2\right).$$

Ainsi,

$$(I) \quad \Leftrightarrow \quad (x - 2)\left(x^2 + 2x + 2\right) \leqslant 0.$$

Soit Δ le discriminant de x^2+2x+2. On a $\Delta = 4-8 = -4 < 0$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2+2x+2 > 0$. Ainsi, pour $x \in \left]-\infty; -2\right[\cup \left]2; +\infty\right[$, on obtient :

$$(I) \quad \Leftrightarrow \quad x - 2 \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \leqslant 2.$$

Or $x \in \left]-\infty; -2\right[\cup \left]2; +\infty\right[$. Conclusion, dans ce cas, l'ensemble des solutions est

$$\mathscr{S}_1 = \left]-\infty; -2\right[.$$

Second cas. Soit $x \in \left]-2; 2\right[$. On a alors $x^2 - 4 < 0$. Donc

$$(I) \quad \Leftrightarrow \quad x^3 - x^2 - 2x \geqslant -x^2 + 4 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 - 2x - 4 \geqslant 0.$$

On comme vu précédemment, $x^3 - 2x - 4 = (x - 2)(x^2 + 2x + 2)$ et $x^2 + 2x + 2 > 0$. Donc

$$(I) \quad \Leftrightarrow \quad (x - 2)\left(x^2 + 2x + 2\right) \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - 2 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geqslant 2.$$

Or $x \in \left]-2; 2\right[$. Dans ce cas,

$$\mathscr{S}_2 = \emptyset.$$

Conclusion, l'ensemble des solutions de (I) est donné par

$$\boxed{\mathscr{S} = \mathscr{S}_1 \cup \mathscr{S}_2 = \left]-\infty; -2\right[.}$$