



Solution de l'exercice de Révision Automne 05 - Trigonométrie

Solution de l'exercice 1 Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}(I) \quad &\Leftrightarrow \cos(2x) + 2 > 5 \sin(x) \\ &\Leftrightarrow 1 - 2 \sin^2(x) + 2 > 5 \sin(x) \\ &\Leftrightarrow 2 \sin^2(x) + 5 \sin(x) - 3 < 0.\end{aligned}$$

Posons $X = \sin(x)$. Dès lors,

$$(I) \quad \Leftrightarrow \quad 2X^2 + 5X - 3 < 0.$$

Soit Δ le discriminant associé. On a

$$\Delta = 25 + 24 = 49 = 7^2.$$

Par conséquent les racines associées sont $\frac{-5-7}{4} = -3$ et $\frac{-5+7}{4} = \frac{1}{2}$. Dès lors,

$$(I) \quad \Leftrightarrow \quad -3 < X < \frac{1}{2}.$$

Or $X = \sin(x) \in [-1; 1]$. Donc

$$(I) \quad \Leftrightarrow \quad X = \sin(x) < \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z}, \quad -\frac{7\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi.$$

Conclusion, l'ensemble des solutions est donné par

$$\mathcal{S} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] -\frac{7\pi}{6} + 2k\pi; \frac{\pi}{6} + 2k\pi \right[.$$