

Exercice 6 de révisions d'Automne

1°) Soit $(n, k) \in \mathbb{Z}$ et $S_n = \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{k}$. On pose $j = 2n+1-k$

on a alors $S_n = \sum_{j=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{2n+1-j} = \sum_{j=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{j}$ car $\forall (n, k) \in \mathbb{Z} \binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$ exact

de plus j est une variable muette donc $S_n = \sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k}$ rien à encadrer

2°) On remarque $\sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{k} + \sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} = \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} = 2S_n$ oui

Or $\sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} = 2^{2n+1}$ grâce à la formule du binôme de Newton oui

On en conclut que $S_n = 2^{2n}$ A encadrer

3°) Bon Anniversaire Mathéo!!! Bonne réponse!