Solution de l'exercice de Révision Automne 06 - Calcul algébrique

Solution de l'exercice 1 Soient $n \in \mathbb{N}$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k}$.

1. On effectue l'inversion d'indice $j = 2n+1-k$. On a alors

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k} = \sum_{j=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{2n+1-j}.$$

Or par symétrie des coefficients binomiaux, on sait que pour tout $j \in [\![n+1; 2n+1]\!]$, $\binom{2n+1}{2n+1-j} = \binom{2n+1}{j}$. Ainsi,

$$\boxed{S_n = \sum_{j=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{j}.}$$

2. Par la question précédente, on a

$$2S_n = S_n + S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k} + \sum_{j=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{j} = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k} + \sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k},$$

car l'indice de sommation est muet. Dès lors, par la relation de Chasles,

$$2S_n = \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k}.$$

On reconnaît alors une somme de Newton :

$$2S_n = \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} 1^k 1^{2n+1-k} = (1+1)^{2n+1} = 2^{2n+1}.$$

Par suite,

$$S_n = \frac{2^{2n+1}}{2} = 2^{2n} = 4^n.$$

Conclusion,

$$\boxed{2S_n = 2^{2n+1} \qquad \text{et} \qquad S_n = 4^n.}$$

3. Très joyeux anniversaire Mattéo!!!