Exercice de révision 7

$(E) : z^3+z^2+z+1=0$

Soit $z \in \mathbb{C}$

1. -1 est une racine évidente ✓

Ainsi,

$(E) \Leftrightarrow (z+1)(z^2+1)=0$ ✓

$\Leftrightarrow z=-1$ ou $z^2+1=0$ ✓

Soit S l'ensemble des solutions de (E) dans $\mathbb{C}$

$\boxed{S=\{-1;-i;i\}}$ oui mais c'est aussi du cours cf corrigé et prop II.12

2. $(I) : \left(\frac{z-2i}{z+2i}\right)^3+\left(\frac{z-2i}{z+2i}\right)^2+\frac{z-2i}{z+2i}+1=0$

Soit $z \in \mathbb{C}\setminus\{-2i\}$ oui

Soit S_E l'ensemble des solutions de (I) dans $\mathbb{C}$

$z \in S_E \Leftrightarrow \frac{z-2i}{z+2i}=-1$ (1) ou $\frac{z-2i}{z+2i}=-i$ (2) ou $\frac{z-2i}{z+2i}=i$ (3) oui

$\frac{z-2i}{z+2i}=\frac{(z-2i)^2}{(z+2i)(z-2i)}$ ✓ $=\frac{z^2-2iz-4}{z^2+4}$ Non ⚠

(1) $\Leftrightarrow \frac{z^2-2iz-4}{z^2+4}=-1$

$\Leftrightarrow z^2-2iz-4=-z^2-4$

$\Leftrightarrow 2z^2-2iz=0$ $\Leftrightarrow z(2z-2i)=0 \Leftrightarrow z=0$ ou $z=i$ direct !

Soit Δ le discriminant associé

$\Delta=-4-4\times2\times0=-4 \neq 0$

Exercice de révision 7

Suite

Posons $\delta = x+iy$ avec $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\delta^2=\Delta$

$\delta^2=\Delta \iff \begin{cases} x^2-y^2+2ixy=-4 \\ |\delta|^2 = x^2+y^2=4 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2-y^2=-4 \\ x^2+y^2=4 \\ 2xy=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2=0 \\ y^2=4 \\ 2xy=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x=0 \\ y=-2 \end{cases}$

$\delta = 2i$

$z=\dfrac{2i-2i}{4}=0$ ou $z=\dfrac{2i+2i}{4}=i$

$\boxed{S_{E_1}=\{0;i\}}$

$(2) \iff \dfrac{z^2-2iz-4}{z^2+4}=-i$

$\iff -z^2i-i4=z^2-2iz-4$

$\iff (1+i)z^2-2iz-4+4i=0$ OK

Soit Δ le discriminant associé

$\Delta = -4-4(1+i)(-4+4i) = -4+32 \overset{\text{ok}}{=} 28 \neq 0$ ✓

$(x,y)\in\mathbb{R}^2$ Posons $\delta=x+iy$ tel que $\delta^2=\Delta$

inutile ! $\Delta\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow \delta=\sqrt{28}$ ou $\delta=-\sqrt{28}$ direct

$\delta^2=\Delta \iff \begin{cases} x^2-y^2+2ixy=28 \\ |\delta|^2=x^2+y^2=28 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2-y^2=28 \\ x^2+y^2=28 \\ 2xy=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2=28 \\ y^2=0 \\ 2xy=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=2\sqrt{7} \\ y=0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x=-2\sqrt{7} \\ y=0 \end{cases}$

Posons $\delta = 2\sqrt{7}$ ✗

$z_1=\dfrac{2i-2\sqrt{7}}{2(i+1)}$ ✗ $=\dfrac{i-2\sqrt{7}}{i+1}$ ✗ $\qquad z_2=\dfrac{i+2\sqrt{7}i}{i+1}$

$\boxed{S_{E_2}=\left\{\dfrac{i-2\sqrt{7}i}{i+1};\dfrac{i+2\sqrt{7}i}{i+1}\right\}}$

A simplifier

$(3) \iff \dfrac{z^2 - 2iz - 4}{z^2+4} = i$

$\iff iz^2 + 4i = z^2 - 2iz - 4$

$\iff z^2(i-1) + 2iz + 4i + 4 = 0$

Soit Δ le discriminant associé

$\Delta = -4 - 4(i-1)(4i+4)$

$\Delta = -4 + 32 = 28$

cas identique que au (2) v

Posons $\delta = 2\sqrt{7}\cancel{i}$

$z_1 = \dfrac{-2i - 2\sqrt{7}i}{2(i-1)} = \dfrac{i + 2\sqrt{7}i}{1-i}$ $\qquad z_2 = \dfrac{-i + 2\sqrt{7}i}{i-1}$

$$\boxed{S_{E_3} = \left\{ \frac{-i+2\sqrt{7}i}{i-1} ; \frac{i+2\sqrt{7}i}{-i+1} \right\}}$$

Même remarque

$$\boxed{S = \left\{ 0 ; i ; \frac{i-2\sqrt{7}i}{i-1} ; \frac{i+2\sqrt{7}i}{i+1} ; \frac{-i+2\sqrt{7}i}{i-1} ; \frac{i+2\sqrt{7}i}{1-i} \right\}}$$

ok cf corrigé.