Equations complexes

Exo 1 :

① Rappeler les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^3+z^2+z+1=0$

On sait que cette équation a 3 solutions dans $\mathbb{C}$.
De plus -1 est une solution évident OK

$$(-1)^3+(-1)^2+(-1)+1=(-1)+1-1+1=0. \checkmark$$

De même
on a : $(i)^3+i^2+i+1=-i-1+i+1=0$ OK

Ainsi aussi

$$(-i)^3+(-i)^2+(-i)+1=-i^3-1-i+i=i-1-i+1=0$$

Donc i et $-i$ sont aussi solutions au polynome.

A encadrer.

Conclusion $-1, i$ et $-i$ sont solutions dans $\mathbb{C}$ de la équation $z^3+z^2+z+1=0$

C'est aussi du cours cf corrigé ou prop II.12.

② $$\left(\frac{z-2i}{z+2i}\right)^3+\left(\frac{z-2i}{z+2i}\right)^2+\frac{z-2i}{z+2i}+1=0$$ Qui est z ?

Posons $w=\frac{z-2i}{z+2i}$ ✓, on a :

$$w^3+w^2+w+1=0$$

et par l'exo ① on sait que les solutions de cette équation sont $-1, i$ et $-i$. Donc on cherche

$$w=-1=\frac{z-2i}{z+2i} \checkmark$$

$$\Leftrightarrow -z-2i=z-2i$$ car $z\neq-2i$

$$z=0 \checkmark$$

$w = \frac{z-2i}{z+2i} = -i$

$\Leftrightarrow -zi+2 = z-2i$ ✓ car $z \neq -2i$

$\Leftrightarrow 2+2i = z+zi$ ✓

$\Leftrightarrow 2+2i = z(1+i)$ ✓

$\Leftrightarrow 2(1+i) = z(1+i)$ ✓

$\Leftrightarrow z = 2$ ✓

$w = \frac{z-2i}{z+2i} = i$

$\Leftrightarrow zi-2 = z-2i$ car $z \neq -2i$

$\Leftrightarrow 2i-2 = z-zi$ ✓

$\Leftrightarrow 2(i-1) = z(1-i)$ ✓

$\Leftrightarrow -2(1-i) = z(1-i)$ ✓

$\Leftrightarrow z = -2$ oui

Conclusion les solutions de l'équation $\left(\frac{z-2i}{z+2i}\right)^3 + \left(\frac{z-2i}{z+2i}\right)^2 + \left(\frac{z-2i}{z+2i}\right) + 1 = 0$ sont $0, -2$ et 2

bien.

A encadrer