Solution de l'exercice de Révision Automne 7 - Equations complexes

Solution de l'exercice 1

1. L'ensemble des complexes z vérifiant $z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ est donné par

$$\mathscr{S} = \mathbb{U}_4 \setminus \{1\} = \left\{ \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{4}} \;\middle|\; k \in [\![1;3]\!] \right\} = \left\{ \mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{2}} \;\middle|\; k \in [\![1;3]\!] \right\} = \left\{ i^k \;\middle|\; k \in [\![1;3]\!] \right\} = \{i; -1; -i\}.$$

   Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{S} = \{i; -1; -i\}.}$$

2. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-2i\}$. Posons $Z = \frac{z-2i}{z+2i}$. On a

$$(E) \;:\; \left(\frac{z-2i}{z+2i}\right)^3 + \left(\frac{z-2i}{z+2i}\right)^2 + \frac{z-2i}{z+2i} + 1 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad Z^3 + Z^2 + Z + 1 = 0.$$

   Donc par la question précédente,

$$\begin{array}{llllll}
 & (E) & & & & \\
\Leftrightarrow & Z \in \mathbb{U}_4 \setminus \{1\} & & & & \\
\Leftrightarrow & Z \in \{i; -1; -i\} & & & & \\
\Leftrightarrow & Z = i & \text{OU} & Z = -1 & \text{OU} & Z = -i \\
\Leftrightarrow & \dfrac{z-2i}{z+2i} = i & \text{OU} & \dfrac{z-2i}{z+2i} = -1 & \text{OU} & \dfrac{z-2i}{z+2i} = -i \\
\Leftrightarrow & z - 2i = iz - 2 & \text{OU} & z - 2i = -z - 2i & \text{OU} & z - 2i = -iz + 2 \\
 & & & & & \text{car } z \neq -2i \\
\Leftrightarrow & (1-i)\,z = -2 + 2i & \text{OU} & 2z = 0 & \text{OU} & z\,(1+i) = 2 + 2i \\
\Leftrightarrow & z = \dfrac{-2\,(1-i)}{1-i} & \text{OU} & z = 0 & \text{OU} & z = \dfrac{2\,(1+i)}{1+i} \\
\Leftrightarrow & z = -2 & \text{OU} & z = 0 & \text{OU} & z = 2.
\end{array}$$

   On note que $-2i \notin \{-2; 0; 2\}$. Conclusion, l'ensemble des solutions de (E) est donné par

$$\boxed{\mathscr{S} = \{-2; 0; 2\}.}$$